Matemáticas

para

Maestros

Proyecto *Edumat-Maestros*

Director: Juan D. Godino

http://www.ugr.es/local/jgodino/fprofesores.htm/

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

MATEMÁTICAS PARA MAESTROS

Dirección: Juan D. Godino

MATEMÁTICAS PARA MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-933517-2-5
Depósito Legal: GR-1163-2004

Impresión:
GAMI, S. L. Fotocopias
Avda. de la Constitución, 24. Granada

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del
Proyecto de Investigación y Desarrollo
del Ministerio de Ciencia y Tecnología,
y Fondos FEDER, BSO2002-02452.

Índice general

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Eva Cid
Juan D. Godino
Carmen Batanero

Índice

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 1:

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE NUMERACIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. ¿Qué números faltan en cada serie? Escríbelos:

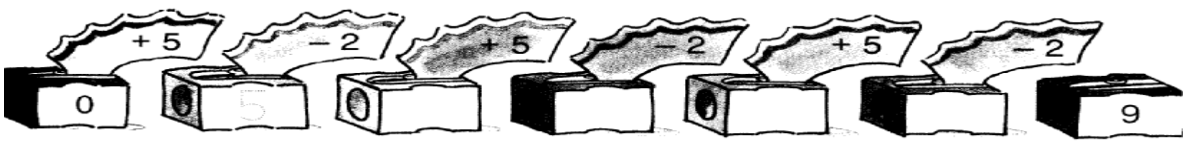
	5	4	3	2	
6		4		2	
	2		4	5	
		4		2	1

2. Marca estos números en la recta numérica: 6, 12, 5, 3, 9, 7, 2

+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——+——

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

3. Continua la serie:



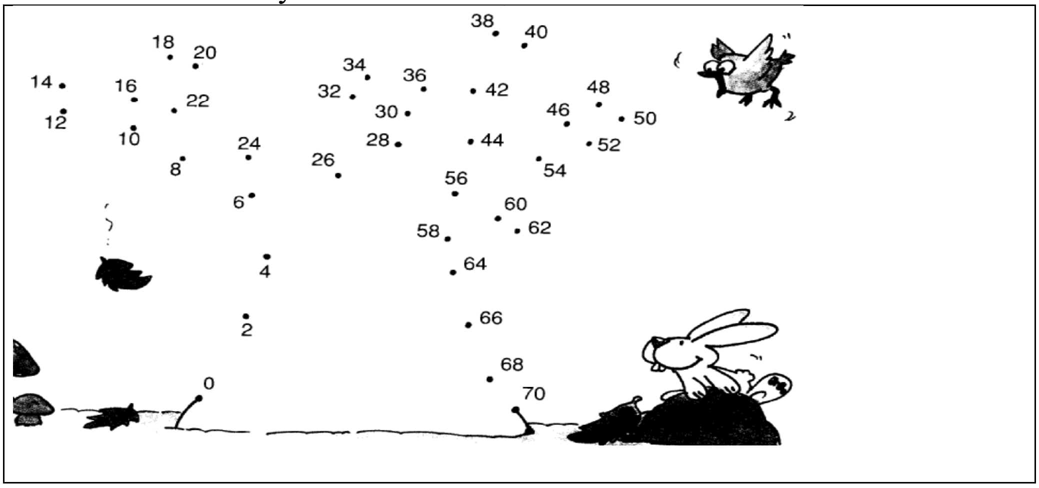
4. Completa con el signo adecuado: Mayor que > menor que < igual que =

13____5	5____18	22___28	13____13	27___16	26___14	20____20	18___21

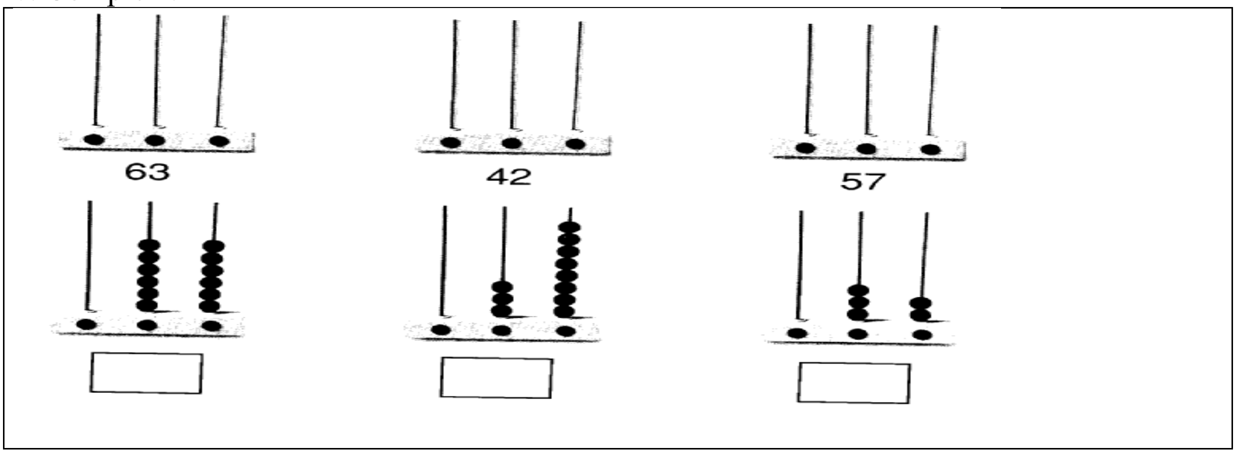
5. Ordena estos números de mayor a menor: 23, 7, 18, 4, 2, 28, 37

6. Continúa las series:
0, 5, 10,...
60, 63, 66,...
99, 97, 95,...
90, 80,...

7. Une los números y colorea:



8. Completa:



9. Representa en un ábaco el número 275. ¿Cuál es la cifra de las unidades? ¿Cuál es la cifra de las decenas? ¿Cuántas unidades vale? ¿Cuál es la cifra de las centenas? ¿Cuántas unidades vale?

10. Escribe cinco números mayores que 240 y menores que 250. Escribe tres números entre 7600 y 8000.

11 ¿Entre qué decenas se encuentran estos números? 138, 73, 47, 219, 444, 576.

12. Haz la descomposición polinómica de estos números: a) 37.248; b) 35.724; c) 12.743; d) 5.869.

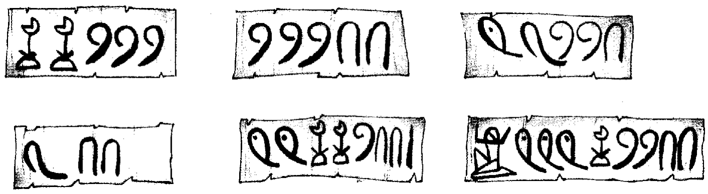
13. Haz la descomposición de 12 en dos sumandos que sean números naturales de todas las formas posibles. Para cada descomposición haz el producto de los sumandos. ¿Qué descomposición de 12 da el producto máximo?

14. Una máquina automática de despacho de billetes de tren admite monedas de 1, 5, 25, y 100 pts. Calcula el número mínimo de monedas necesario para pagar 3.242 pts; 1.587 pts; 4.287 pts.

15. Escribe con números romanos: 13, 27, 18, 70, 223, 617, 45, 3000.

16. Aproxima estos números a la decena de millar más próxima: 31794, 48076, 9.340, 20.250.

17. Escribe qué número indica cada una de estas tablas:



18. Escribe con símbolos egipcios los siguientes números:

200 625 1250

B: Conocimientos Matemáticos

1.TÉCNICAS DE RECUENTO

1.1. Situación introductoria: Instrumentos para contar

Toma un folio y divídelo en dos partes iguales. Escribe tu nombre en cada mitad. En una de ella simula la caída de una "granizada" durante unos 30 segundos, marcando con puntos gruesos la posición en la que caen los granizos. Obtendrás un dibujo parecido al que mostramos en este cuadro:

```
   *         *      *   *
*     *         *            *
 *     *   *           *   *
   *    ** *      *   *
     *                *
* *        *          *
     *      *     *       *
 *     *   *       *      *
   *          *       *
*    *         * *            *
```

a) ¿Cuántos puntos hay en tu dibujo? ¿Qué has hecho para contestar a esta pregunta?
b) En la otra mitad del folio escribe un mensaje para que otro compañero reproduzca exactamente la misma cantidad de granizos que tú has producido, aunque no en la misma posición. No puedes utilizar las palabras uno, dos, tres,..; ni los símbolos 1, 2, 3,...
c) Intercambia el mensaje con el de otro compañero; cada uno de vosotros ha de interpretar el mensaje del compañero y reproducir su granizada.
d) Comprueba que la reproducción ha sido correcta.
e) Describe el procedimiento que habéis utilizado en la realización de la tarea.

1.2. Necesidades sociales que resuelven las técnicas de contar

Las técnicas de contar son universales, y se han encontrado en todas las sociedades estudiadas hasta ahora. Estas técnicas han dado origen al concepto de *número* y a la Aritmética. Surgen ligadas a la necesidad de:

- comunicar información referente al tamaño (la numerosidad) de las colecciones de objetos (*cardinal* de la colección).
- indicar el lugar que ocupa o debe ocupar un objeto dentro de una colección ordenada de objetos (*ordinal* del objeto).

En las sociedades prehistóricas -cazadores y recolectores- se plantea ya, aunque sea a pequeña escala, la necesidad de responder a la pregunta, ¿cuántos hay? o ¿cuántos son?. También aparece la necesidad de establecer un orden de actuación: ¿qué se hace primero?, ¿quién interviene en segundo lugar?, etc.

A partir de esas necesidades sociales se desarrollan diferentes técnicas de recuento que han ido evolucionando a lo largo de la historia. En nuestra sociedad se utiliza predominantemente una técnica de recuento con palabras, aun cuando se conservan vestigios de otras varias técnicas.

Cada colección de "objetos numéricos" vamos a llamarla "sistema numeral" o sistema de representación numérica. El hecho de que dos colecciones de objetos sean coordinables se expresa diciendo que representan el mismo *número*. De este modo los números no son objetos como pueden ser una mesa, un perro, etc.; se dice que son "objetos ideales" o abstractos. En definitiva, interesa considerarlos como "maneras de hablar" ante ciertas situaciones en las que reflexionamos sobre las actividades de recuento y ordenación y los instrumentos que usamos para esas actividades.

1.3. Técnica de recuento para obtener cardinales

Las técnicas de recuento actuales se basan en la existencia de unas palabras (numéricas) que se recitan siempre en el mismo orden. Estas palabras forman un conjunto bien ordenado (hay un primer elemento y un siguiente para cada una de ellas). Para obtener el cardinal de un conjunto se realizan las siguientes acciones:

- Se adjudica a cada elemento del conjunto contado una palabra numérica distinta y sólo una en el orden habitual: uno, dos, tres,..., treinta.
- Una vez acabada la fase anterior, la palabra adjudicada al último elemento del conjunto contado, se repite, haciendo referencia con ella a toda la colección (treinta) y designando el número de elementos o *cardinal* del conjunto.

Observamos que podemos contar (hallar el cardinal de un conjunto) porque nos sabemos de memoria una sucesión ordenada de palabras: uno, dos, tres, etc, y las recitamos siempre en el mismo orden. La tarea más complicada de los recuentos consiste en adjudicar a cada objeto del conjunto una palabra numérica distinta y sólo una. Ello requiere definir un orden total en el conjunto contado, orden que podemos definir a voluntad, sin que se modifique el resultado final. Para contar se requiere una coordinación entre la palabra y la mano o la vista, y a veces, se usan técnicas auxiliares, marcando, por ejemplo, cada punto contado. Al terminar de contar, la última palabra, hace referencia, no sólo al último objeto señalado, sino también a todo el conjunto, esto es, se trata de una "propiedad" que se predica de todo el conjunto. Por tanto, cada palabra numérica que se pronuncia tiene un doble significado: es el ordinal del elemento correspondiente en la ordenación que se va construyendo, y es el cardinal del conjunto formado por los objetos ya contados hasta ese momento.

Hay que tener en cuenta también el *uso intransitivo* del recuento, esto es, el recitado de la serie de palabras numéricas en sí mismas, sin mención alguna a cardinales u ordinales. Aprender las palabras numéricas y cómo repetirlas en el orden correcto es aprender el recuento intransitivo, mientras que aprender su uso como medidas de conjuntos es el aprendizaje del recuento transitivo. "Si aprendemos un tipo de recuento antes que otro no tiene importancia cuando nos interesan los primeros números. Pero lo que es seguro, y no carente de importancia, es que tenemos que aprender algún procedimiento recursivo para generar la *notación* en el orden adecuado antes que hayamos aprendido a contar transitivamente, ya que hacer esto consiste, bien directa o indirectamente, en correlacionar los elementos de la serie numérica, con los miembros del conjunto que estamos contando. Parece, por tanto, que es posible que alguien aprenda a contar intransivamente, sin aprender a contar transitivamente. Pero no a la inversa" (Benacerraff[1], 1983: 275)

[1] Benacerraf, P. (1983). What numbers could not be. En, P. Benacerraf y H. Putnam (Eds), *Philosophy of mathematics. Selected reading*, 2nd edition (pp. 272-294). Cambridge: Cambridge University Press.

Técnicas auxiliares del recuento

Cuando estamos contando los elementos de un conjunto, necesitamos distinguir en cada paso el subconjunto ya contado, del no contado. Las técnicas auxiliares que se utilizan son:

- Trazar mental o físicamente un camino a seguir cuando vamos contando los objetos.
- Marcar los objetos ya contados.
- Separar manual o mentalmente los objetos contados de los no contados (realizar una partición del conjunto).
- Sustituir la colección de partida por otra que tenga el mismo cardinal, contando esta última.

El uso de una u otra técnica auxiliar depende de:

- el número de elementos del conjunto contado;
- la configuración geométrica del conjunto;
- el tipo de objetos que constituyen el conjunto contado;
- la accesibilidad de los elementos del conjunto (objetos físicos al alcance de la mano, objetos físicos al alcance de la vista pero no de la mano, objetos evocados mentalmente).
- la movilidad de los objetos.

Todas estas técnicas auxiliares tienen que ir precedidas de una primera coordinación entre la mano o la vista y la emisión de la palabra. Es decir, hay que aprender a emitir cada palabra al mismo tiempo que la atención se fija en un objeto.

Coordinabilidad entre conjuntos

Al contar ponemos en correspondencia cada elemento de un conjunto con otro conjunto (de objetos, palabras, muescas, etc.). Las noción de cardinal se puede formalizar usando el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Definición 1(Coordinabilidad): Un conjunto A coordinable o equipotente con el conjunto B si existe una correspondencia biyectiva de A en B. Se escribe A~ B. Cada elemento del primer conjunto se pone en correspondencia con uno y sólo uno del segundo.

Definición 2 (Conjunto infinito): A es un conjunto infinito si existe un subconjunto propio B de A que sea coordinable con A, o sea, $\exists$ f : A $\rightarrow$ B, biyectiva.

Ejemplo: El conjunto de números pares es infinito, porque podemos ponerlo en correspondencia biyectiva con el conjunto de números múltiplos de 10. Así:

$$2 \leftrightarrow 20$$
$$3 \leftrightarrow 30$$
$$4 \leftrightarrow 40$$

y siguiendo de esta forma por cada número par hay uno y sólo un múltiplo de 10, pero por otro lado el conjunto de múltiplos de 10 es un subconjunto de los números pares.

Si un conjunto no es infinito se dice que es finito. En los conjuntos finitos no es posible que uno de sus subconjuntos sea coordinable con todo el conjunto.

Proposición 1: La relación de coordinabilidad es una relación de equivalencia en el conjunto de los conjuntos finitos, o sea, cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Proposición 2: Todos los conjuntos coordinables entre si tienen el mismo cardinal. Todos estos conjuntos son equivalentes, desde el punto de vista de tener el mismo cardinal y decimos que forman una *clase de equivalencia.*

1.4. Técnicas de recuento para obtener ordinales

Para obtener el ordinal de un elemento se utiliza la sucesión de palabras: uno, dos, tres, ... o la sucesión de palabras: primero, segundo, tercero, etc. que llamamos "palabras numéricas ordinales". El resultado del recuento se expresa indistintamente mediante unas u otras palabras. Se dice de un elemento que es el décimo quinto o que es el quince. A medida que se avanza en la sucesión de palabras numéricas se utilizan cada vez menos las palabras ordinales.

Dado un conjunto totalmente ordenado y un elemento de dicho conjunto, podemos usar diversas técnica para determinar el número ordinal:

- Se recita una de las sucesiones de palabras numéricas (ordinales o cardinales)
- Se adjudican dichas palabras a los elementos del conjunto siguiendo el orden establecido hasta llegar al elemento en cuestión.
- La palabra que le corresponde a dicho elemento es su ordinal.

Como podemos ver, a diferencia de lo que sucede en la determinación de cardinales, para asignar un ordinal, el orden en que se van eligiendo los elementos ya no queda a discreción del que efectúa el recuento, sino que viene fijado de antemano.

Para obtener el ordinal de un elemento no es absolutamente necesario tener previamente definido un orden total en el conjunto, sino que basta con saber qué elementos son anteriores al que nos interesa. En ese caso tenemos esta segunda técnica:

- Se obtiene el cardinal del conjunto formado por todos los elementos anteriores al que nos interesa, utilizando la técnica de recuento correspondiente.
- Pronunciamos la palabra numérica siguiente a la que se refiere el cardinal de dicho conjunto, indicando con ella el ordinal del elemento.

Esta segunda técnica permite reordenar a voluntad el conjunto de los elementos anteriores al dado, puesto que para calcular cardinales el orden en que se elijan los elementos es irrelevante.

1.5. Orden de ordinales y cardinales

Decimos que un ordinal es 'anterior' a otro si al recitar la sucesión numérica en el orden habitual, la palabra numérica correspondiente al primer ordinal se recita antes que la correspondiente al segundo ordinal. Por ejemplo, el ordinal 'cuatro' es anterior al ordinal 'nueve' porque, a la hora de contar, la palabra 'cuatro' se dice antes que la palabra 'nueve', la primera palabra es anterior en el tiempo a la segunda.

Decimos que un cardinal es 'más pequeño' que otro, o 'es menor' que otro, si al emparejar los elementos de dos conjuntos que los tengan por cardinales respectivos, en el segundo conjunto quedan elementos sin pareja. Por ejemplo, el cardinal 'cuatro' es más pequeño, o menor, que el cardinal 'nueve' porque si emparejamos cuatro tazas con nueve platos quedarán platos sin taza. Esta última definición lleva implícita la idea de que todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal pueden emparejarse sin que quede ningún elemento sin pareja.

Estos dos órdenes, el ordinal y el cardinal, son equivalentes, es decir, que si un ordinal es anterior a otro los cardinales correspondientes a esas mismas palabras numéricas cumplen que el primero es más pequeño que el segundo; y recíprocamente. En general, decimos que el número *a* 'es menor' que *b*, entendiendo que eso significa que el ordinal *a* es anterior al ordinal *b* y que, al mismo tiempo, el cardinal *a* es más pequeño que el cardinal *b*.

1.6. Principios que subyacen en las técnicas de contar

El análisis de las diversas técnicas de contar pone de manifiesto los principios que subyacen en ellas, es decir, los aspectos conceptuales que es necesario entender y tener en cuenta para contar correctamente. En el caso de la técnica de contar para obtener cardinales son los siguientes:

- *Principio del orden estable*. Las palabras numéricas uno, dos, tres, ... deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
- *Principio de la correspondencia uno a uno*. A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- *Principio de irrelevancia del orden*. El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.
- *Principio cardinal*. La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el ordinal de ese elemento, sino también el cardinal del conjunto.

En el caso de la técnica de contar para obtener ordinales los principios que la dirigen son el del orden estable y el de la correspondencia uno a uno referido únicamente al propio elemento y a los anteriores a él. Aquí el orden en que sean elegidos los elementos del conjunto para adjudicarles las palabras numéricas ya no es irrelevante de cara a la obtención del ordinal correspondiente.

1.7. Otras técnicas de recuento: ejemplos históricos[2]

Hasta ahora hemos visto que para contar se necesitan unas palabras numéricas, pero, ¿estas palabras han existido siempre? ¿Existen técnicas de recuento que no se basen en palabras? A continuación mostraremos cómo han resuelto diferentes culturas el problema de responder a la pregunta, ¿cuántos hay?

En primer lugar, el hombre tiene una capacidad innata para reconocer ciertos cardinales de conjuntos sin necesidad de efectuar un recuento. Esta capacidad recibe el nombre de "subitación" y permite reconocer cardinales de conjuntos con un número pequeño de objetos, por lo que algunas culturas comunican mediante el lenguaje cuál es el cardinal de un conjunto, aunque no tengan técnicas de contar, por ejemplo:

- En algunas sociedades, como los zulúes y pigmeos de Africa, los arandan y kamilarai de Australia, los bocotudos de Brasil y los aborígenes de las islas Murria, sólo se han inventado las dos primeras palabras numéricas: una para indicar la unidad, otra para indicar la pareja.
- Varias tribus de Oceanía declinan los nombres de las cosas en singular, dual, trial, cuatrial, plural, del mismo modo que nosotros declinamos los nombres en singular y plural. Tienen, por tanto, la posibilidad de indicar el cardinal de un conjunto de hasta cuatro objetos pero no tienen palabras para contar.

[2] Esta información de tipo histórico procede de Ifrah (1985) libro cuya lectura se recomienda.

En segundo lugar, muchas sociedades han desarrollado técnicas de contar sin palabras, que han llegado hasta nuestros días. Por ejemplo: llevar la cuenta de los votos a favor y en contra trazando palotes, mostrar los dedos para indicar un cardinal u ordinal (esta técnica se utiliza mucho con los niños pequeños), utilizar palillos, trozos de papel o fichas para llevar la cuenta de las partidas ganadas en un juego de cartas, pasar con los dedos las bolitas del rosario para llevar la cuenta de las avemarías, utilización de ábacos en las escuelas, etc. En nuestra cultura estas técnicas se mezclan con las técnicas de recuento con palabras, que son las predominantes, y, frecuentemente, sirven de refuerzo a estas últimas. Sin embargo, existen y han existido sociedades en las que las técnicas de recuento sin palabras eran muy importantes e incluso, las únicas existentes. Algunos ejemplos son los siguientes:

- Los papúes de Nueva Guinea y los bosquimanos de Africa del Sur, entre otros muchos aborígenes, cuentan utilizando las partes del cuerpo humano. Para ello y en un orden previamente establecido van señalando los dedos de las manos y de los pies, las diferentes articulaciones del cuerpo, los ojos, nariz, boca, etc.
- Ha sido una práctica frecuente en los ejércitos de diferentes épocas y sociedades que, antes de entrar en batalla, cada guerrero depositara un guijarro en un lugar convenido. A la vuelta cada guerrero recogía uno de dichos guijarros. Los sobrantes indicaban el número de bajas que se habían producido en la batalla. La utilización de guijarros para contar o realizar operaciones ha dado lugar a la palabra "cálculo" que proviene de la palabra latina "calculus" que significa "piedra pequeña".

Tenemos así un muestrario de objetos físicos que sirven como objetos numéricos y que podemos clasificar en:

- muescas, palotes;
- objetos ensartados en collares o en varillas, nudos en una cuerda;
- objetos sueltos: guijarros, palitos, conchas, perlas, huesos, etc.
- partes del cuerpo humano.

Ejercicios:

1. Si un pastor trashumante tuviese que contar 999999 cabezas de ganado, ¿Cuánto tiempo tardaría, haciendo una muesca por segundo?

En conclusión, una técnica de recuento sin palabras se caracteriza por la existencia de un conjunto de *objetos numéricos*, que sirven para contar. A cada elemento del conjunto contado se le asocia un objeto numérico distinto y sólo uno, construyendo un subconjunto de objetos numéricos, cuya presentación es la respuesta a la pregunta, *¿cuántos hay?* Esto pone de manifiesto que lo que subyace en un recuento, la parte común a todos ellos, es el establecimiento de una correspondencia uno a uno entre el conjunto contado y un subconjunto numérico de referencia, tanto si los elementos de este último son objetos físicos, palabras, partes del cuerpo humano, etc. El conjunto de objetos numéricos debe estar "naturalmente estructurado", y constituye lo que llamaremos un "sistema numeral" o sistema de representación numérica.

1.8. El paso del recuento sin palabras al recuento con palabras

Las etapas necesarias para pasar de una técnica de recuento con objetos al recuento con palabras son las siguientes:

- Comparar el conjunto que se quiere contar con un conjunto de referencia, formado por objetos visibles o evocables por los demás. El principio de la correspondencia uno a uno permite pasar de una comunicación poco precisa del cardinal de una colección a una comunicación precisa de la misma, representándola mediante un conjunto de los objetos numéricos (muescas, guijarros, cuentas, etc.).

- Comparar con un conjunto de referencia ordenado (partes del cuerpo humano, objetos diferenciados) para poder establecer el ordinal de cada elemento dentro de un conjunto. La presentación sucesiva de los objetos diferenciados siempre en el mismo orden, principio del orden estable, permite comunicar el ordinal de un elemento.
- Utilización indistinta de los conjuntos de referencia ordenados para la obtención de cardinales u ordinales. Cada uno de los objetos numéricos, al estar diferenciado de los demás, puede recibir un nombre distinto.
- Descubrimiento de que basta nombrar el último elemento del conjunto numérico ordenado con el que se ha establecido la correspondencia uno a uno para transmitir la información deseada, tanto en contextos cardinales como ordinales: principio cardinal.

En un momento dado, algunas sociedades se dan cuenta de que al usar un conjunto numérico ordenado, ya no es necesario presentar al interlocutor todo el conjunto con el que se ha establecido la correspondencia, ni enumerarlo. Con hacer referencia al último objeto es suficiente pues el interlocutor puede evocar todos los elementos anteriores.

No todas las culturas han sido capaces de llegar a este punto. Por ejemplo, los papúes de Nueva Guinea, para indicar el cardinal "siete" hacen el gesto de tocar con su mano izquierda, sucesivamente, los dedos de la mano derecha, la muñeca y el codo. Si se hace delante de ellos el gesto único de tocar el codo no le encuentran sentido. Vestigios de esta incapacidad cultural se encuentran en los niños pequeños que preguntados sobre cuántos hay cuentan y dicen, por ejemplo,: “uno, dos, tres, cuatro”, y ante la pregunta insistente del adulto: “si pero, ¿cuántos hay?” vuelven a decir: “uno, dos, tres y cuatro”.

Más adelante el conjunto de referencia se desliga de los objetos físicos. Cada palabra se convierte en una palabra numérica (palabra que sirve para contar). En otras sociedades primitivas algunas de esas palabras siguen evocando partes del cuerpo humano.

En particular, nuestro conjunto numérico habitual es un conjunto ordenado de palabras: uno, dos, tres, cuatro, etc. Si alguien dice que tiene cinco objetos, su interlocutor entiende la información porque se imagina un objeto para el uno, otro para el dos, otro para el tres, otro para el cuatro y otro para el cinco. Es decir, la transmisión de dicha información numérica está dependiendo del hecho de tener almacenada en nuestra memoria esa sucesión de palabras, de forma que cuando nos dicen una de ellas somos capaces de recordar todas las anteriores.

1.9. Técnicas abreviadas de contar

Las técnicas de contar exigen mucho tiempo cuando los elementos a contar son muchos. No es extraño, por tanto, que se intente hacerlas más breves. Algunas situaciones permiten acortar el proceso de contar, partiendo de una colección de objetos de cardinal conocido al que se añaden o suprimen elementos para obtener el cardinal de la colección modificada. Las formas más importantes de abreviar los recuentos son las siguientes:

- Contar de dos en dos, de tres en tres, etc., aprovechando nuestra capacidad de reconocer directamente los cardinales de conjuntos pequeños.
- Contar hacia delante o hacia atrás, desde un cardinal dado. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de dieciocho objetos y nos dicen que añadamos algunos más, no volvemos a contar todo para saber el cardinal del nuevo conjunto, sino que contamos los nuevos

objetos adjudicándoles las palabras 'diecinueve', 'veinte', 'veintiuno', etc. De la misma manera, si queremos suprimir unos cuantos objetos de un conjunto de dieciocho vamos adjudicando a los objetos surprimidos las palabras 'diecisiete', 'dieciséis', etc. y la última palabra numérica indicará el cardinal del conjunto final.

- Contar hacia delante o hacia atrás desde un cardinal dado hasta otro cardinal también dado. Esta técnica se usa cuando queremos saber cuántos objetos hay que añadir o quitar a un conjunto de cardinal dado para obtener otro cardinal conocido, o bien, qué diferencia existe entre dos conjuntos de cardinal dado. Por ejemplo, si nos preguntan cuántos objetos hemos añadido a un conjunto que tenía dieciséis y ahora tiene veinticuatro objetos, podemos decir: diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte, veintiuno, veintidós, veintitrés, veinticuatro, al mismo tiempo que vamos levantando dedos. Al final tendremos ocho dedos levantados que nos dan la respuesta a la pregunta inicial. Del mismo modo, si nos preguntan cuántos objetos hay que quitar para pasar de tener catorce a tener once, podemos decir: trece, doce, once, al mismo tiempo que levantamos dedos. Los tres dedos levantados nos dan la respuesta a la pregunta.
- Contar hacia delante o hacia atrás, desde el cardinal dado, tantas veces como indique el número de objetos a añadir o suprimir, respectivamente. Por ejemplo, si a un conjunto de veinticuatro elementos le quitamos cinco elementos podemos decir: veintitrés, veintidós, veintiuno, veinte, diecinueve, a medida que vamos quitando efectivamente esos objetos o levantando dedos. El hecho de quitar los cinco objetos o tener cinco dedos levantados nos indica que la cuenta ha terminado y el resultado es diecinueve.

Como hemos podido ver, algunas de estas técnicas abreviadas necesitan, además de la colección habitual de palabras numéricas, una colección suplementaria de objetos numéricos. Esta colección referencial de apoyo suelen ser los dedos, pero podría ser cualquier otra: palotes, fichas, etc.

2. LOS NÚMEROS NATURALES. DIFERENTES USOS Y FORMALIZACIONES

2.1. La noción de número natural y sus usos

Como resumen de las secciones anteriores podemos decir que *contar* es poner en correspondencia uno a uno los distintos elementos de un conjunto (contado) con un subconjunto de otro conjunto (contador, sistema numérico de referencia o sistema numeral). Los elementos del conjunto numérico pueden ser objetos físicos (piedrecillas, semillas, marcas en una varilla o en un segmento, partes del cuerpo), palabras, símbolos, etc. Pueden también ser imaginados por una persona, es decir, ser *representaciones internas* de objetos para realizar comparaciones o cálculos. Pero tanto si son perceptibles, como mentales, el uso básico que hacemos de ellos es contar y ordenar.

En una primera aproximación, podemos decir que los *números naturales* son cualquier sistema de "objetos" (símbolos, marcas, materiales concretos, palabras,...), perceptibles o pensados, que se usan para informar del cardinal de los conjuntos y para ordenar sus elementos, indicando el lugar que ocupa cada elemento dentro del conjunto. El sistema más común es el de las palabras: cero, uno, dos, tres,..; y los símbolos, 0, 1, 2, 3,... Para poder ser usados en las situaciones de recuento y ordenación estos sistemas de objetos numéricos deben tener una estructura recursiva específica, que se concreta en los llamados axiomas de Peano enunciados en la sección 2.2.

El número natural responde a la cuestión, ¿cuántos elementos tiene este conjunto? (recuento del número de elementos) y en estas circunstancias se habla de *número cardinal.*

Para hallar el cardinal de un conjunto se le pone en correspondencia biyectiva con una parte del conjunto de los números naturales, pero fijándose sólo en el número atribuido al último elemento que se cuenta. Los números naturales también se pueden usar para ordenar un conjunto y entonces se habla de *número ordinal.*

La noción de número natural surge de la fusión de los conceptos de número cardinal y ordinal [3], identificación que se realiza mediante el postulado fundamental de la aritmética: "El número cardinal de un conjunto coincide con el número ordinal del último elemento, y es siempre el mismo cualquiera que sea el orden en que se haya efectuado el recuento"

El número cardinal resulta de considerar, no un elemento, sino todo el conjunto, prescindiendo de la naturaleza de los elementos que lo componen y del orden en que se consideran. El número ordinal resulta de prescindir de la naturaleza de los objetos y teniendo en cuenta solamente el orden. La reflexión sobre el cardinal y ordinal y sobre las operaciones que se realizan sobre ellos permite identificar una misma estructura operatoria, lo que lleva a hablar del “número natural”.

Algunos autores consideran la *medida* como un contexto de uso diferente de uso de los números naturales, hablando incluso del “número de medir”. Pensamos que este uso es equivalente al de cardinal. Al medir una cantidad de magnitud tomando otra como unidad se trata de determinar *cuántas* unidades (o bien múltiplos y submúltiplos) hay en la cantidad dada. De manera equivalente, hablar del cardinal de un conjunto se puede ver también como “medir” el tamaño o numerosidad del conjunto considerado tomando el objeto unitario como unidad de medida. Cuando se trate de medir magnitudes continuas será necesario ampliar la noción de número para incluir a los racionales y reales.

Finalmente, mencionamos un uso habitual que no es propiamente numérico. Se trata del uso de un sistema numérico como etiquetas identificativas de objetos. Por ejemplo, los números de carnet de identidad de una persona, los números de teléfonos, la identificación de las teclas en calculadoras, etc. En realidad tales “números” se usan como códigos, careciendo del sentido cardinal, ordinal y algorítmico.

2.2. Formalizaciones matemáticas de los números naturales

La reflexión de los matemáticos sobre las propiedades y técnicas anteriores lleva a definir el conjunto de números naturales N de diversas formas que resumimos a continuación.

Formalización de Peano (Axiomas de Peano)

Esta formalización se basa en ideas muy sencillas: Consideramos como conjunto de los números naturales todo conjunto tal que cada elemento tiene un único siguiente, hay un primer elemento, y contiene todos los elementos siguientes de los anteriores. Los conjuntos que tienen estas propiedades se llaman *conjuntos naturalmente ordenados* o *conjunto de números naturales.*

[3] De esta manera la expresión “número natural” adquiere un nuevo significado matemático, al indicar la equivalencia estructural-operatoria de los sistemas de referencia numéricos. Es el aspecto algoritmico o formal: “el número se concibe operacionalmente gracias a las reglas según las cuales el usuario juega con él. Se formaliza en el enfoque axiomático. Los números aparecen como elementos de anillos y cuerpos que se fijan axiomáticamente”[3]. Este uso no es ajeno a las prácticas escolares ya que un objetivo importante del estudio de las matemáticas, incluso en los primeros niveles educativos, es la adquisición de destrezas básicas de cálculo y la comprensión de los algoritmos correspondientes.

Un conjunto de objetos (N) se dice que está naturalmente ordenado (y por tanto, se puede usar para contar y ordenar otros conjuntos de objetos de cualquier naturaleza) si cumple las siguientes condiciones:

1. A cada objeto le corresponde otro que se llama su siguiente o sucesor.
2. Existe un primer elemento, 0, que no es sucesor de ningún otro elemento.
3. Dos elementos diferentes de N no pueden tener el mismo sucesor (la función sucesor es inyectiva).
4. Todo subconjunto de N que contiene el 0 y que contiene el sucesor de cada uno de sus elementos coincide con N (principio de inducción).

En lugar de usar subconjuntos, el principio de inducción puede formularse con propiedades diciendo que toda propiedad de los números válida para 0 y que, siendo válida para n, lo es también para $n+1$, es verdadera para todos los números naturales.

Formalización a partir de la idea de clases de equivalencia (cardinal)

En este caso nos basamos en la idea de que dos conjuntos de objetos que tienen el mismo cardinal son "equivalentes" y todos los conjuntos equivalentes forman una misma clase de conjuntos: conjuntos vacíos, conjuntos con 1, 2, 3, elementos.... Puesto que el conjunto de estas clases está naturalmente ordenado, proporciona una posible definición de N.

Proposición: Sea F el conjunto de todos los conjuntos finitos. F = {A, B, C, ...}. El conjunto (N) formado por todas las clases de equivalencia producido en F por la relación de coordinabilidad, o sea, el conjunto de todas las clases de equivalencia, es un conjunto naturalmente ordenado.

$$N = \{[A], [B], [C], ...\}$$

La relación de orden se define de la siguiente manera,

Definición: Dadas dos clases, [A], [B] diremos [A] ≤ [B] si existe una correspondencia entre dos representantes A y B de dichas clases que sea inyectiva. Esto ocurre cuando el cardinal de la primera clase es menor que el de la segunda.

Proposición 3: La relación binaria ≤ definida entre las clases es una relación de orden total en N por cumplir las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Esta relación binaria es una relación de orden total:

- Reflexiva, Card(A) ≤ Card (A), pues la aplicación identidad es inyectiva.
- Antisimétrica
- Transitiva
- Conexa: Dados dos naturales a, b, ocurre que a≤b ó b≤a. Basta colocar como conjunto inicial el que tiene menos elementos.
- Es una buena ordenación: Cualquier subconjunto tiene primer elemento; cada elemento tiene su siguiente y no hay ningún número intermedio entre ambos.

Convenio de representación de las clases de equivalencia:
La clase vacía ∅ se representa por la notación 0, la clase unitaria por 1, la clase binaria por 2, etc. En la práctica el conjunto de clases de equivalencia N = {[A], [B], [C], ...}se sustituye por el sistema de símbolos {0, 1, 2, 3.,.. }. Cada símbolo representa a una clase de equivalencia y es también llamado el cardinal o número de elementos de cada conjunto de la clase.

Conjuntos ordenados y número ordinal
Ordenar un conjunto A es ponerlo en biyección con una parte del conjunto ordenado de N, pero atribuyendo a cada elemento de A un número fijo de N, que se llama su número ordinal, o *número de orden*.

Así al elemento al que atribuimos el número 1 le llamamos primero (1º), al que atribuimos 2, le llamamos segundo (2º), etc. al que atribuimos el número mayor de todo el subconjunto N le llamamos último; al anterior, penúltimo; al anterior a éste, antepenúltimo. Por tanto, el número que forma pareja con un elemento determinado del conjunto A es el número ordinal de dicho elemento. Aquí, a diferencia de lo que ocurría en la operación de contar, es esencial la forma de efectuar los apareamientos, es decir, el orden en que se van tomando los elementos del conjunto A. A cada apareamiento le corresponde una ordenación del conjunto.

Definición algebraica de la ordenación de números naturales

Una posibilidad es definir la relación de orden en los números naturales a partir de las operaciones:

Dados dos números naturales a y b, a es menor que b, $a \leq b$, si existe otro número natural d tal que $a + d = b$. Esta relación binaria definida en N cumple las propiedades:

- Es una relación de orden total, es decir que si se toman dos números cualesquiera siempre se puede decir cuál de ellos es mayor.
- Reflexiva, es decir, para todo natural, n, $n \leq n$;
- Antisimétrica, es decir, para dos naturales n y p, si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq n$, entonces necesariamente $n = p$.
- Transitiva: es decir, para tres naturales n, p y q, si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq q$, entonces necesariamente $n \leq q$.

Esta relación de orden es compatible con las operaciones de sumar y multiplicar en N. Esto quiere decir que,

- Si se suma un mismo número a los dos miembros de una desigualdd, no cambia el sentido de la desigualdad.
- Si se multiplican los dos miembros de una desigualdad por un mismo número natural, no cambia el sentido de la desigualdad.

3. TIPOS DE SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y ASPECTOS HISTÓRICOS[4]

3.1. Situaciones introductorias

Situación A

Un extraterrestre llega a la Tierra. Viene de una galaxia lejana y su misión es contactar con los terrícolas e intercambiar información. Una vez superadas las dificultades de idioma el extraterrestre se interesa, entre otras muchas cosas, por el sistema de numeración escrito que se usa en la Tierra. Los hombres de la Nasa (naturalmente el extraterrestre va a parar a los Estados Unidos) se lo explican y él comenta: "Ah! Es el mismo sistema que utilizamos nosotros, pero nosotros usamos solamente cuatro símbolos, el del cero (□), el del uno (|), el del dos (⊥) y el del tres (T)". ¿Cómo escribe el extraterrestre el número 9?

Situación B

El Parlamento Europeo, después de varios asesoramientos científicos, decide cambiar el número de símbolos de nuestro sistema de numeración escrito. Las opciones que se barajan

[4] La mayor parte de la información contenida en esta sección sobre aspectos históricos de los sistemas de numeración y las ilustraciones proceden de Ifrah (1985) libro cuya lectura se recomienda.

como mejores son la de utilizar sólo seis símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5) o la de utilizar doce símbolos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β). Mientras el Parlamento discute nosotros vamos a escribir los primeros 25 números en esos nuevos sistemas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
...									

Situación C

En el primer cuadro de la hoja adjunta tienes que agrupar las estrellas de 4 en 4. Después agruparás los grupos de 4 nuevamente de 4 en 4. Se sigue el proceso mientras sea posible continuarlo y, una vez finalizado, se escribe en las casillas situadas encima del cuadro (empezando por la derecha) el número de estrellas que ha quedado sin agrupar de 4 en 4, en la casilla siguiente, el número de grupos de 4 que no se han podido agrupar de 4 en 4, hasta llegar a escribir el número de las últimas agrupaciones realizadas.

En los demás cuadros se realiza el mismo proceso pero agrupando de 6 en 6, de 10 en 10 y de 12 en 12, respectivamente.

Hoja de datos para la situación C


```
x x   x   x x x x x x   x x  x x
  x  x x x  x   x   x   x   x   x
x   x      x  x        x x  x x
 x    x  x  x x  x x    x  x x  x

x x  x x  x  x x x   x x  x   x x
x  x x x    x   x  x   x   x   x x
x x  x   x       x    x   x    x
x   x   x   x x  xx   x  x  x x
 x  x x x   x   x    x    x    x  x
```


```
x x   x   x x x x x x   x x  x x
  x  x x x  x   x   x   x   x   x
x   x      x  x        x x  x x
 x    x  x  x x  x x    x  x x  x

x x  x x  x  x x x   x x  x   x x
x  x x x    x   x  x   x   x   x x
x x  x   x       x    x   x    x
x   x   x   x x  xx   x  x  x x
 x  x x x   x   x    x    x    x  x
```


```
x x   x   x x x x x x   x x  x
x
  x  x x x  x   x   x    x   x
x
x   x      x  x        x x  x
x
 x    x  x  x x  x x    x  x
x  x

x x  x x  x  x x x   x x  x
```


```
x x   x   x x x x x x   x x  x
x
  x  x x x  x   x   x    x   x
x
x   x      x  x        x  x
x x
 x    x  x  x x  x x    x
x x  x

x x  x x  x  x x x   x x  x
```

3.2. Necesidad de aumentar el tamaño de las colecciones de objetos numéricos

La aparición en el Neolítico de sociedades estatales y del entramado administrativo que una sociedad de este tipo conlleva plantea la necesidad de:

- obtener el cardinal de colecciones formadas por muchos objetos (colecciones muy numerosas).
- recordar los cardinales correspondientes a muchas colecciones.

La contabilidad de un Estado exige la representación de números grandes y el almacenamiento de esos números de forma que sean fácilmente localizables. Pero eso supone:

- la invención de muchas palabras numéricas o la utilización de muchos objetos numéricos para representar grandes números.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan al receptor del mensaje entenderlo con rapidez.
- la búsqueda de sistemas de representación de los números que permitan guardarlos en memoria de forma duradera, accesible y ocupando poco espacio.

Para resolver estas exigencias, las diferentes sociedades han creado sistemas de numeración compuestos por un pequeño número de signos que combinados adecuadamente según ciertas reglas sirven para efectuar todo tipo de recuentos y representar todos los números necesarios a esas sociedades. Para ello se han basado en dos principios:

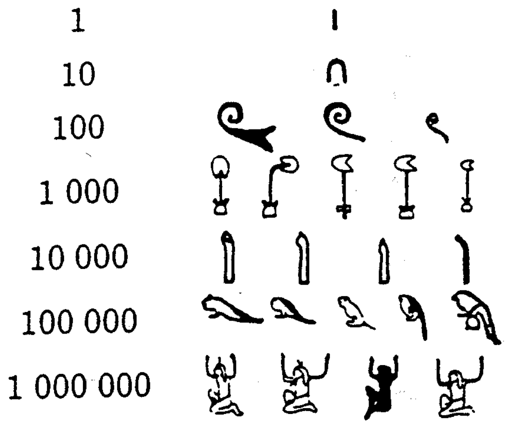
- los signos no representan sólo unidades sino también grupos de unidades. A cada uno de esos grupos de unidades se le llama unidad de orden superior. Al número de unidades que constituye cada unidad de orden superior se le llama base del sistema de numeración.
- cualquier número se representa mediante combinaciones de los signos definidos en el sistema de numeración.

3.3. Algunos ejemplos de sistemas de numeración escritos

Vamos a referirnos ahora a diversos sistemas de numeración escritos, todos ellos de base 10, pero que han sido construidos a partir de principios diferentes.

a) Sistema jeroglífico egipcio

Se basa en la definición de símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez.

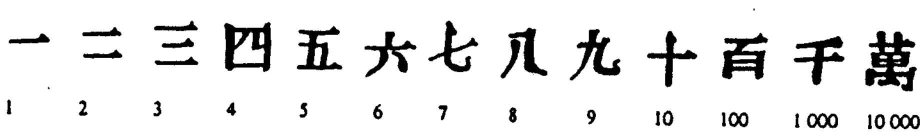


A partir de ahí los números se representan repitiendo esos símbolos todas las veces que haga falta. Por ejemplo, el número 243688 se representaría de la siguiente manera:

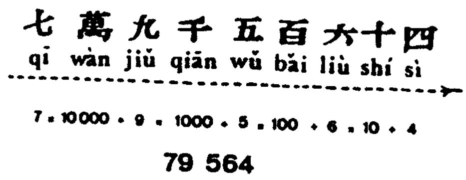
200 000 3000 800
40 000 600 8
243 688

b) Sistema chino

En el sistema chino no sólo se tienen símbolos para la unidad, diez y las potencias de diez sino para todos los números intermedios entre uno y diez



De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas pues los números que preceden a las potencias de la base indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:



aunque hay que tener en cuenta que los chinos escriben de arriba hacia abajo.

Este sistema incorpora un principio de tipo multiplicativo, es decir, el número representado ya no es la suma de los valores de los signos que lo componen, sino una mezcla de sumas y productos.

Ejercicios

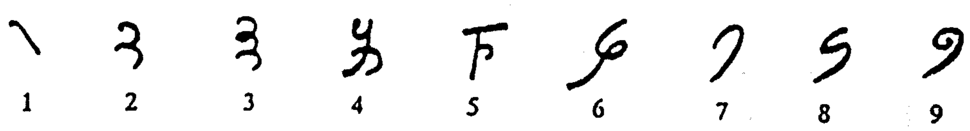
2. Escribe en el sistema egipcio, romano y chino el número 1386.

3 ¿Cuál es el menor número que se escribe con 25 símbolos en sistema egipcio?

4. Imagina que en un nuevo lenguaje, los primeros números son: Sis, boom, bah, tra, la, y después de contar un buen rato, la serie de números continúa: Hip, hoo, rah, fo, fum. Completa las operaciones siguientes:
 a. Hoo +bah=
 b. Fo-boom=
 c. Fum-hip=

c) Sistema hindú

En el norte de la India y desde el siglo III a. C., existió un sistema de numeración escrito cuyos primeros símbolos eran los siguientes:

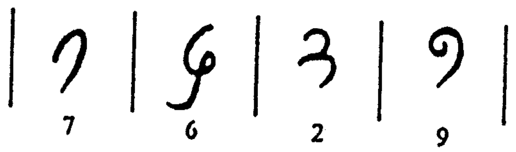


Pero además este sistema también tenía símbolos específicos para los números

10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	200	300	400	500	600	700	800	900
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

y para escribir, por ejemplo, el número 5436 se escribía el símbolo que representaba al número "5000" seguido del que representaba al "400", el del "30" y, por último, el del "6". Se trataba por tanto de un sistema de tipo aditivo.

Por otro lado, para realizar las operaciones construían una tabla de calcular dibujando rayas verticales sobre la arena de manera que las fichas, según en qué casilla se situasen, significaban unidades, decenas, centenas, etc. Si colocaban tres fichas en la casilla más a la derecha significaba tres unidades. Si las colocaban en la casilla siguiente significaban tres decenas. Pero en algún momento se les ocurrió dibujar las nueve primeras cifras en las casillas en lugar de utilizar fichas. Así, por ejemplo, el número 7629 lo representaban de la siguiente manera:



Como consecuencia los símbolos que representaban los números del 1 al 9, se utilizaron regularmente en los cálculos mientras que los que representaban decenas, centenas, etc. no se utilizaban porque eso venía indicado por la casilla en que se encontraba la cifra (A los signos del 1 al 9 se les suele llamar cifras o dígitos). Aparece así una notación posicional en la que el significado de la cifra se complementa con la posición que ocupa. La cifra situada en la casilla de la derecha del número anterior significa 9 mientras que situada en la siguiente casilla significaría 90 y en la siguiente 900. Naturalmente, cuando faltaba una unidad de un orden determinado se dejaba la casilla correspondiente vacía.

Podría pensarse que el paso de este tipo de notación a una en que se eliminasen las barras verticales es inmediato. Sin embargo, este paso no se dio hasta varios siglos después pues exige definir un signo para el cero y esto es algo que muy pocas culturas han hecho. La razón es difícilmente inteligible para nosotros, acostumbrados desde niños a la existencia del signo 0, pero tenemos que comprender lo artificioso que resulta crear un símbolo para indicar el vacío, la nada, la no existencia de algo. Si algo no existe no hace falta apuntarlo. El vacío se indica mostrándolo, no rellenándolo con un signo. La idea de inventar un signo para indicar la no existencia de unidades o la existencia de un lugar vacío es una idea sorprendente y se les ocurrió, por fin, a los matemáticos hindúes a principios del siglo VI d. C., lo que les permitió prescindir de las barras verticales a la hora de representar los números. A partir de entonces un número, por ejemplo el 9100 se representó así:

Cuando los árabes conquistaron el norte de la India conocieron este sistema de numeración y al darse cuenta de lo mucho que facilitaba los cálculos lo adoptaron. Las cifras que vienen a continuación corresponden a la grafía habitual en el Califato de Bagdad.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Nuestro sistema de numeración escrito es, por tanto, una invención hindú que, posteriormente, fue asumida por los árabes, los cuales la difundieron por todo su imperio. Los contactos comerciales y culturales de Europa con el mundo árabe propiciaron la difusión de este sistema en la Europa occidental donde entró en competencia con el sistema de numeración romano. Lentamente fue ganando adeptos hasta que a finales del siglo XVIII quedo definitivamente implantado.

3.4. Tipos de sistemas de numeración

Los ejemplos anteriores nos muestran la existencia de diferentes tipos de sistema de numeración que ahora vamos a definir con más precisión.

a) Sistema aditivo regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad, la base y las potencias de la base. El número representado se obtiene sumando los valores de los signos que componen su representación. El sistema egipcio es un ejemplo de sistema aditivo regular de base 10.

b) Sistema multiplicativo regular

En él se definen símbolos para la unidad, la base, las potencias de la base y todos los números comprendidos entre la unidad y la base. El número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que le precede y sumando los resultados junto con las unidades. Un ejemplo de este tipo de sistemas es el sistema chino de numeración que es un sistema multiplicativo regular de base 10.

c) Sistema posicional regular

En este sistema se definen símbolos para la unidad y los números comprendidos entre la unidad y la base. También se define un símbolo, el cero, para indicar la no existencia de unidades. En cambio, no se definen símbolos específicos para la base ni para las potencias de la base, representándose éstas por medio de combinaciones de los símbolos de la unidad y del cero. En estas condiciones, cada uno de los signos que componen la representación del número, dependiendo del lugar que ocupa, hace referencia a las unidades o a una determinada potencia de la base. El número representado se obtiene de la misma manera que en un sistema multiplicativo. Nuestro sistema de numeración escrito es un ejemplo de sistema posicional decimal.

Reglas de los sistemas de numeración posicionales

Las reglas de los sistema de numeración posicionales ordenados se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Elegido un número b >1 como base del sistema de numeración, se utilizan b símbolos, llamados cifras o guarismos (0, 1, 2, ..., b-1) que representan el cero y los primeros números naturales.
2. Cada b unidades simples (o de 1er orden) forman una unidad de 2º orden, y se escribe a la izquierda de las unidades de 1er orden. (Principio del valor relativo de las cifras)
3. Se continúa el proceso como en 2)
4. Cuando no hay unidades de un orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.
5. La base b se representa por $10_{(b}$ (es la unidad de 2º orden); la unidad de tercer orden, b^2 se expresará como $100_{(b}$.

Teorema fundamental: Existencia y unicidad de la expresión de un número n en base cualquiera b

Dado un número natural b (que se llama base del sistema de numeración), todo número natural $n \in N$ se puede expresar de manera única mediante el siguiente polinomio:

$$n= c_k b^k + r_k b^{k-1} + r_{k-1} b^{k-2} + ... + r_3 b^2 + r_2 b + r_1$$

donde $r_1, r_2, ..., r_k, c_k$, son números naturales menores que b.

3.5. Cambios de base en los sistemas de numeración

Para comprender las reglas de los sistemas de numeración posicionales ordenados, entre los que se encuentra el sistema decimal de numeración habitualmente usado, es conveniente realizar y analizar las tareas de paso del sistema de numeración base 10 a otras bases distintas, tanto menores que 10, como mayores, y viceversa.

Paso de la escritura en base 10 de un número n a la base b

En primer lugar habrá que determinar la cifra de las unidades (o de primer orden), para lo cual habrá que dividir *n* entre *b*; el resto será la cifra de la unidades de la nueva expresión. Para hallar la cifra a colocar en la posición de segundo orden se divide el primer cociente obtenido por *b* y se toma el resto; y así sucesivamente.

Ejemplo: El número $235_{(10}$, expresado en base 5 será $1420_{(5}$

235	5		
35	47	5	
0	2	9	5
		4	1

Paso de la escritura de un número n en base b a base 10

Basta expresar la escritura de *n* en forma polinómica (en forma de potencias de la base *b*) y realizar las operaciones indicadas en base 10; el resultado será la escritura en de *n* en base 10.

Ejemplo: El número $2034_{(5}$ será el $269_{(10}$ ya que,
$2034_{(5} = 2.5^3 + 0.5^2 + 3.5 + 4 = 269$ (haciendo las operaciones en base 10)

El paso de la escritura de un número de base b_1 a base b_2 se puede realizar pasando el número dado en base b_1 a base 10 y después dicho número en base 10 a base b_2 por el método explicado anteriormente.

Ejercicios

5. Efectúa los cambios de base siguientes: 3415 (de base 10 a base 3); 999 (de base 10 a base 7); 25842 (de base 10 a base 12); 1001110 (de base 2 a base 10); ABC6 (de base 13 a base 10); 33421 (de base 5 a base 3); 34250 (de base 6 a base 4) y 102102 (debase 3 a base 7).

6. Escribe las cifras del número siguiente en base 3:
$1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$
Expresa el número anterior en base 9

7. Escribe en base 5 las cifras del siguiente número
5 x (5 x (5 x (5 + 4) + 3) + 2) + 1 ; x significa el signo de multiplicar.

8. En base 16 (hexadecimal) los dígitos usados son 0 hasta 9 y las letras A, B, C, D, E, F para los números del diez hasta el quince.
a) Convierte $B6_{(16}$ a base 10;
b) Convierte $B6_{(16}$ a base 2;
c) Explica cómo se puede pasar $B6_{(16}$ a base 2 directamente, esto es, sin pasarlo primero a base 10.

3.6. Características de nuestros actuales sistemas de numeración escrito y oral

a) Sistema de numeración escrito

Como ya hemos dicho antes es un sistema posicional regular de base 10. Los símbolos que se definen son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

b) Sistema de numeración oral

Es un sistema multiplicativo y de base 10 pero con irregularidades. Es un sistema multiplicativo porque define símbolos no sólo para los números anteriores a la base sino también para la base y sus potencias. El número 3400 no lo leemos como "tres cuatro cero cero" sino como "tres mil cuatrocientos", es decir, hacemos referencia a las potencias de la base "mil" y "cien" o "ciento".

Las irregularidades dependen del idioma y en castellano son las siguientes:

- Once, doce, trece, catorce y quince. En un sistema regular se diría: dieciuno, diecidos, diecitrés, diecicuatro y diecicinco.
- Veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa. En un sistema regular se diría: dos dieces (o dos decenas), tres dieses, cuatro dieses, etc.
- Quinientos en lugar de cinco cientos
- Algunas de las potencias de diez no tienen un símbolo específico, sino un símbolo compuesto por los correspondientes a otras potencias. Así, por ejemplo, la potencia 10^4 no tiene un símbolo propio como le correspondería en un sistema regular, sino un símbolo compuesto: diez mil. Lo mismo sucede con otras potencias de la base (10^5 se dice cien mil, 10^7 se dice diez millones, 10^8 se dice cien millones, etc.), lo que hace que las potencias mil (10^3) y millón (10^6) se conviertan en bases auxiliares.
- La palabra 'billón' tiene un significado ambiguo. En España y otros países de origen latino quiere decir 'un millón de millones' (10^{12}), mientras que en los países de tradición anglosajona la palabra equivalente significa 'mil millones' (10^9).

c) Sistema de numeración oral ordinal

Se usa para nombrar a los ordinales, aun cuando también puede usarse para ello el sistema oral habitual. Es un sistema de numeración de base 10 en el que se definen símbolos para la unidad y los demás números anteriores a la base, para la base y sus potencias, y también para los nueve primeros múltiplos de la base y del cuadrado de la base. Un número viene dado por la suma de los valores de los signos que lo representan; es por tanto un sistema de tipo aditivo, pero con una sobreabundancia de términos. En muchas de las palabras que nombran a los diferentes múltiplos de la base o de la base al cuadrado se hace patente un criterio de tipo multiplicativo. Por ejemplo, el término 'octingentésimo' se relaciona con los términos 'ocho' y 'centésimo'.

Los símbolos de este sistema de numeración son los siguientes: primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo, undécimo (o décimo primero), duodécimo (o décimo segundo), vigésimo (20), trigésimo (30), cuadragésimo (40), quincuagésimo (50), sexagésimo (60), septuagésimo (70), octogésimo (80), nonagésimo (90), centésimo (100), ducentésimo (200), tricentésimo (300), cuadringentésimo (400), quingentésimo (500), sexcentésimo (600), septingentésimo (700), octingentésimo (800), noningentésimo (900), milésimo (1000), millonésimo (1.000.000). Según esto el ordinal 783 se diría septingentésimo octogésimo tercero. Hoy en día, bastantes de estos términos han caído en desuso.

Ejercicios

9.Utiliza nuestro sistema de numeración oral para expresar el número:
754.120.004.002000.000.000

10. Utiliza nuestro sistema posicional de numeración escrita para representar el número siete trillones, setenta mil siete billones, siete millones, setenta y siete. 2.

11. Expresa mediante nuestro sistema oral ordinal los números 11, 14, 27, 53, 99, 135, 366, 584 y 1336.

12. ¿Cuántos números capicúas hay comprendidos entre 1 y 1000?

A continuación vamos a describir otros sistemas de numeración, lo que nos permitirá ver cómo diferentes culturas han resuelto el problema de representar los números.

3.7. Sistemas de numeración orales: ejemplos

En la lengua *Api de las Nuevas Hebridas* representan los 24 primeros números partiendo de 5 palabras: tai, lua, tolu, vari, luna (que significa literalmente "la mano") que equivalen a nuestras palabras: uno, dos, tres, cuatro y cinco. A partir de ahí los números siguientes los nombran combinando esas palabras: para 6 se dice: otai (literalmente 'el nuevo uno')

- para 7 se dice: olua (literalmente 'el nuevo dos')
- para 8 se dice: otolu (literalmente 'el nuevo tres')
- para 9 se dice: ovari (literalmente 'el nuevo cuatro')
- para 10 se dice: lualuna (literalmente 'las dos manos')
- para 11 se dice: lualuna i tai (literalmente 'dos manos y uno') para 15 se dice: toluluna (literalmente 'tres manos')
- para 16 se dice: toluluna i tai (literalmente 'tres manos y uno') para 20 se dice: variluna (literalmente 'cuatro manos')
- para 24 se dice: variluna i vari (literalmente 'cuatro manos y cuatro')

Se trata de un sistema de base cinco, pues los números se expresan indicando los grupos de cinco que los componen y el resto que queda.

En *euskera* las palabras que se utilizan para nombrar los diez primeros números son las siguientes: bat (uno), bi (dos), hiru (tres), lau (cuatro), bost (cinco), sei (seis), zazpi (siete), zortzi (ocho), bederatzi (nueve), hamar (diez). A partir de ahí, construyen las palabras numéricas como sigue:

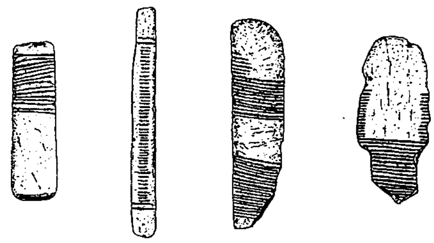
- once se dice: hamaika
- doce se dice: hamabi (literalmente 'diez y dos')
- trece se dice: hamahiru (literalmente 'diez y tres')
- catorce se dice: hamalau (literalmente 'diez y cuatro')
- quince se dice: hamabost (literalmente 'diez y cinco')
- dieciséis se dice: hamasei
- diecisiete se dice: hamazazpi
- dieciocho se dice: hemezortzi (no sigue la regla, pero actualmente se admite también 'hamazortzi ')
- diecinueve se dice: hemeretzi (no sigue la regla)
- veinte se dice: hogei
- treinta se dice: hogeitamar (literalmente 'veinte y diez')
- cuarenta se dice: berrogei (no sigue la regla)
- cincuenta se dice: berrogeitamar (literalmente 'cuarenta y diez')
- sesenta se dice: hirurogei (literalmente 'tres veintes')
- setenta se dice: hirurogeitamar (literalmente 'tres veintes y diez')

- ochenta se dice: larogei (literalmente 'cuatro veintes")
- noventa se dice: larogeitamar (literalmente 'cuatro veintes y diez')
- cien se dice: ehun.

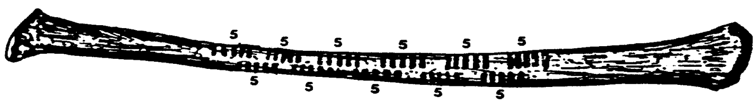
Se trata de un sistema de base 20 con una base auxiliar 10. En el sistema de numeración oral francés también se conservan vestigios de una base 20. Se dice, por ejemplo: 'quatre-vingts' (cuatro veintes) para indicar 'ochenta' y 'quatre-vingts-dix' (cuatro veintes diez) para indicar 'noventa' .

3.8. Sistemas de numeración basados en colecciones de objetos: ejemplos

a) Muescas: La utilización de muescas para llevar una cuenta está documentada desde la Prehistoria.



Entre los huesos prehistóricos con muescas existen algunos (como el reflejado en el dibujo siguiente) en los que las muescas han sido representadas en grupos de cinco. Es uno de los primeros ejemplos de agrupación para facilitar la lectura del número.

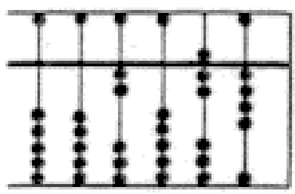


b) Objetos ensartados en hilos: collares

En algunas regiones de África occidental los pastores contaban sus rebaños haciendo desfilar a los animales uno detrás de otro. Cuando pasaba el primero ensartaban una concha en una tira blanca, otra cuando pasaba el segundo y así sucesivamente. Al llegar al décimo animal deshacían el collar y ensartaban una concha en una tira azul que asociaban a las decenas. Después ensartaban de nuevo conchas en la tira blanca hasta llegar al vigésimo animal y entonces ensartaban una segunda concha en la tira azul. Cuando había ya diez conchas en la tira azul deshacían el collar de las decenas y ensartaban una concha en una tira roja reservada para las centenas. Y así sucesivamente hasta que se acababa el recuento de los animales. Al llegar a los doscientos cincuenta y ocho animales, por ejemplo, habría dos conchas en la tira roja, cinco en la azul y ocho en la blanca. La base de este sistema es la decena.

c) Objetos ensartados en varillas: ábacos

El ejemplo que proponemos es el de un ábaco que se ha utilizado para contar y calcular incluso después de la segunda guerra mundial (ábaco japonés).



La varilla situada a la derecha indica centésimas, la segunda varilla décimas, la tercera unidades, la cuarta decenas, la quinta centenas, etc. En la varilla de las unidades cada una de las cuatro bolas de la parte de abajo indica una unidad, pero la bola situada en la parte de arriba indica cinco unidades. De esa manera el número siete se representará moviendo la bola superior y dos bolas inferiores hacia el eje central. En la varilla de las decenas la bola superior indica cincuenta y cada una de las bolas inferiores diez y así sucesivamente. Se trata pues de un sistema de base diez con una base auxiliar cinco.

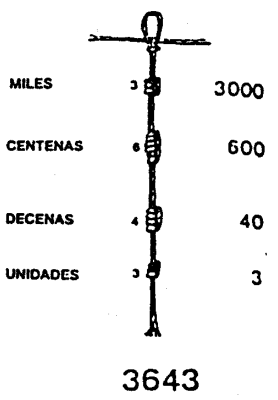
Ejercicios

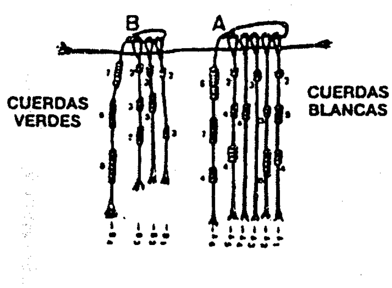
13. Expresa los números 457 y 17089 mediante:
    - un ábaco japonés
    - el sistema de numeración romano
    - sistema de numeración egipcio
    - sistema de numeración chino

14. Supongamos que cuentas usando manos y dedos. ¿Cómo representarías el número 12?

d) Nudos

Los incas representaban números y contaban haciendo nudos en una cuerda. Según la posición en que estaban situados los nudos indicaban unidades, decenas, centenas, millares, etc. A estas cuerdas se les llamaba quipus.





El dibujo de la derecha representa una contabilidad de ganado bovino (cuerdas blancas y ganado ovino (cuerdas verdes). Las cuerdas blancas de derecha a izquierda representan el número de toros, vacas lecheras y vacas estériles. Las cuerdas verdes indican número de borregos, corderos, cabras, etc. Las cuerdas que enlazan a las otras indican las sumas de las cantidades representadas en las cuerdas enlazadas.

e) Objetos sueltos: valor definido por la posición

Existen sistemas de numeración basados en guijarros o fichas en los que el valor numérico de los objetos viene dado por la posición que ocupan en un tablero distribuido en casillas. Así, según que el guijarro o ficha esté situado en una u otra casilla significará una unidad, una decena, una centena, etc. Estas tablas de fichas se utilizaron en Europa para efectuar cálculos hasta el siglo XVIII.

f) Objetos sueltos: valor definido por alguna característica del objeto

Los sumerios utilizaban pequeños objetos de arcilla para contar y representar los números. El valor numérico de cada objeto venía dado por su forma de la siguiente manera:
1 = cono pequeño; 10 = bola pequeña; 60 = cono grande; 600 = cono grande perforado; 3600 = bola grande; 36000 bola grande perforada.

Se trataba de un sistema de numeración de base 60 ($3600 = 60^2$) con una base auxiliar 10 ($600 = 10 \times 60$, $36000 = 10 \times 60^2$).

Para garantizar el pago de una deuda, por ejemplo, el conjunto de objetos que representaba el valor numérico de la deuda se encerraba en una esfera hueca sobre la que se imprimían los sellos del acreedor, el deudor y el notario. Este último guardaba la esfera y, posteriormente, en el momento de saldar la deuda, la abría y las partes implicadas se aseguraban de que el pago estaba conforme.

3.9. Sistemas de numeración basados en partes del cuerpo humano: el origen de algunas bases

Se cree que la mayor parte de los sistemas de numeración tienen su origen en otros más primitivos basados en la utilización de distintas partes del cuerpo humano como objetos numéricos. Las bases más utilizadas: 5, 10, 12, 20, 60 pueden explicarse como un intento de aumentar la capacidad contable de los dedos.

a) Base cinco

Si utilizamos los dedos de la mano derecha para contar unidades hasta cinco y por cada cinco unidades levantamos un dedo de la mano izquierda estaremos en un sistema de numeración de base cinco. Cada cinco unidades dan lugar a una unidad de orden superior, los dedos de la mano izquierda, y toda la mano izquierda representará una unidad de segundo orden compuesta de 25 unidades.

b) Base diez

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos para contar unidades. Un hombre representaría una unidad de orden superior, la decena.

c) Base veinte

Aparece al utilizar los dedos de las dos manos y de los dos pies para contar unidades. Un hombre representaría la unidad de orden superior que en este caso sería una veintena.

d) Base doce

Se explica si se utiliza el dedo pulgar de la mano derecha para contar las falanges de los otros dedos de la misma mano. Tenemos así doce falanges en la mano derecha. Si además por cada doce unidades señalamos una falange de la mano izquierda tendremos una unidad de primer orden, la docena, y las dos manos representaran una unidad de segundo orden ($144 = 12^2$).

e) Base sesenta

Aparece como una combinación de cinco y doce si contamos falanges con la mano derecha y por cada docena levantamos un dedo de la mano izquierda. Las dos manos representan entonces una "sesentena".

Ejercicios

15. El uso de la base 10 en el sistema de numeración indoarábigo se puede suponer que se debe a que tenemos 10 dedos entre ambas manos. Supongamos que entre los marcianos ocurrió lo mismo, esto es, usaron un sistema de numeración basado en el número de dedos de sus manos. ¿Cuántos dedos tenían los marcianos en sus manos si sabemos que en dicho planeta el número diecisiete se escribía 21?.

16. Construye un sistema aditivo de base 12 y utilízalo para expresar los números 1245674, 23478 y 100.

17. Construye un sistema aditivo de base 20 y utilízalo para representar los números del ejercicio anterior.

18. En la siguiente tabla escribimos los números del 0 al 35 en base 6. Describe todos los patrones numéricos que puedes encontrar:

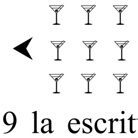
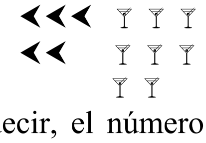
0	1	2	3	4	5
10	11	12	14	14	15
20	21	22	24	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

3.10. Otros ejemplos históricos de sistemas de numeración escritos

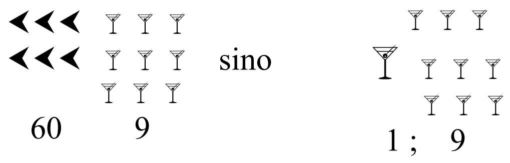
La necesidad de almacenar información numérica propia de las sociedades estatales propicia la aparición de los sistemas escritos de numeración. Estos números escritos se conservan bien, ocupan poco lugar y su almacenamiento se organiza con facilidad; tienen, por tanto, ventajas frente a las representaciones numéricas orales o mediante objetos. A continuación vamos a ver algún ejemplo más :

a) Los sumerios empezaron a desarrollar una contabilidad escrita a partir del 3200 a.C. consistente en dibujar en tablillas de arcilla las figuritas de barro que utilizaban para indicar los números. En la figura de una “factura” sumeria descubierta en Uruk (hacia el 2850 antes de J.C.) se observa el dibujo de las esferas y conos de barro que se utilizaban para representar los números. Aparecen también unos dibujos que representan sacos, dibujos de espigas que indican distintos tipos de cereal y unos dibujos de patos que representan aves en general.

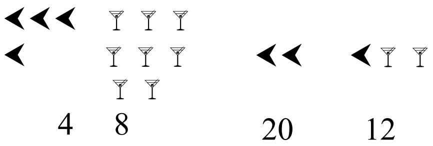
b) Los matemáticos y astrónomos de Babilonia fueron los primeros en construir un sistema de numeración escrito en el que se utilizaba en parte un criterio posicional. Para escribir los números utilizaban sólo dos signos: un 'clavo' vertical 𒁹 que indicaba la unidad y una 'espiga' 𒌋 que indicaba la decena. Los números de 1 a 59 se representaban de manera aditiva repitiendo esos signos las veces que hiciera falta. Así, por ejemplo, 19 y 58 se escribían:

 (1 espiga + 9 clavos)  (5 espigas + 8 clavos)

Pero a partir de 59 la escritura era posicional, es decir, el número 69, por ejemplo, no se escribía



Así pues, una escritura como:

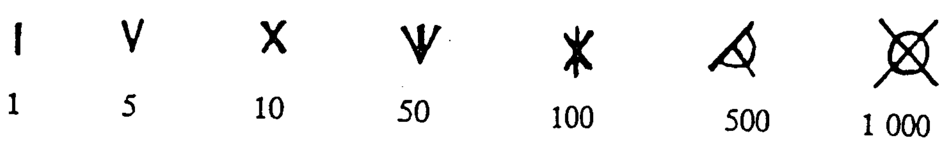


correspondía al número 48 x 60^2 + 20 x 60 + 12 = 174.012. Nos encontramos ante un sistema posicional de base 60 donde los signos que indican cuántas unidades o diferentes potencias de la base tiene el número constituyen un sistema aditivo de base 10. Este sistema tenía muchos inconvenientes porque la falta de un cero y la mezcla de sistema posicional con aditivo creaba muchas ambigüedades en la escritura de los números. Por ejemplo, 'clavo' nunca se sabía bien si indicaba una unidad, 60 unidades o cualquier otra potencia de la base; dos 'clavos' tanto podían representar dos unidades como el número 61, etc.

La astronomía Babilonia nos ha transmitido su manera de representar los números en algunos ámbitos muy relacionados con la astronomía, como la medida del tiempo en horas, minutos y segundos y la de la amplitud de ángulos en grados, minutos y segundos. Cuando decimos que un intervalo de tiempo es de 3h 23m 55s estamos utilizando un sistema de numeración posicional de base 60 (sexagesimal) ya que cada hora equivale a 60 minutos y cada minuto a 60 segundos. La diferencia con el sistema babilonio consiste en que no representamos las horas, minutos y segundos utilizando un sistema aditivo de base 10, sino utilizando nuestro sistema posicional de base 10.

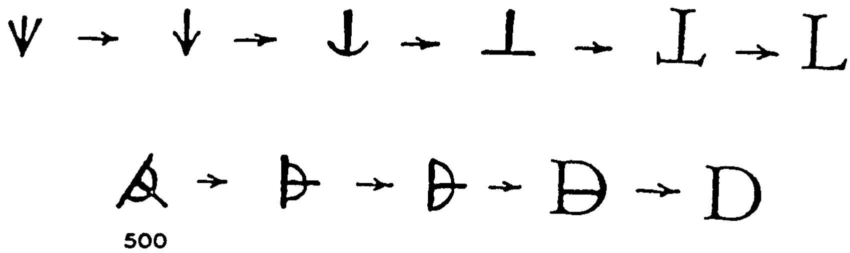
c) En Italia, antes del Imperio Romano existían pueblos de pastores que habían desarrollado una cultura de muescas. Por cada cabeza de ganado que contaban grababan una muesca en un palo o hueso. Para facilitar la lectura de las muescas empezaron a agruparlas de cinco en cinco haciendo marcas separadoras que sintetizasen la información numérica contenida en las muesca.

Al llegar a la quinta muesca grababan un trazo oblícuo y en la décima dos trazos oblícuos cruzados. Volvían a grabar el trazo oblícuo en la muesca número 15 y el aspa en la número 20. Para facilitar la lectura de números más grandes inventaron signos específicos para 50, 100, 500 y 1000.



El siguiente avance se produce cuando esos pastores se dan cuenta de que no es necesario grabar todas las muescas puesto que algunas de ellas ya recogen toda la información anterior. Es decir, cuando descubren que para expresar el número IIIIV IIIIV IIIIX IIIV II es suficiente con escribir XXVII

Los romanos heredaron estas marcas y acabaron por identificarlas con algunas letras.



Así, el trazo oblicuo se identificó con la letra V, el aspa con la X, la marca para 50 se transformó en una L, la de 100 en una C, y la de 500 y 1000 en una D y una M, respectivamente. Además añadieron una última modificación al sistema consistente en introducir un principio sustractivo para acortar la escritura de ciertos números. De acuerdo con este principio escribían IV en vez de IIII, IX en vez de VIIII, XL en ve de XXXX, etc. Estamos pues ante un sistema de tipo aditivo, aunque con irregularidades, de base 10 y con una base auxiliar 5. Este sistema todavía lo usamos nosotros para indicar ordinales y fechas.

Actualmente para escribir en números romanos seguimos las siguientes reglas de escritura:

i) Los símbolos *I* (uno), *X* (diez) , *C* (cien) y *M* (mil) son los ‘principales' y los símbolos *V* (cinco), *L* (cincuenta) y *D* (quinientos) los 'secundarios'.
ii) Los símbolos principales no se pueden repetir más de tres veces y los secundarios no pueden repetirse ninguna vez.
iii) Todo símbolo situado a la derecha de uno de igual o mayor valor se suma. Si un símbolo principal está situado a la izquierda de un símbolo de mayor valor se resta.
iv) A la izquierda de un símbolo solo se puede poner como símbolo de menor valor el símbolo principal inmediatamente anterior.
v) Los millares, diezmillares, cienmillares, etc. de los números mayores o iguales que 4.000 se escriben como si fueran unidades, decenas, centenas, etc., colocándoles una raya horizontal por encima. Por ejemplo, 583.459 se escribe, $\overline{DLXXXIII}$ *CDLIX.*

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En los siguientes ejercicios, escribe todas las posibilidades utilizando un código de escritura adecuado y cuenta después cuántas son. Si salen muchos casos posibles encuentra algún procedimiento que permita hallar el número total sin tener que contar y describe cómo podrían escribirse todos los casos.

a) Distribuye, de todas las maneras posible, 15 monedas de peseta en cuatro montones.

b) Ana, Marisa, Luis y Pedro quedan en una cafetería. Llegan de uno en uno. Escribe las posibilidades de orden de llegada de esas cuatro personas.

c) Escribe todos los números de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 3, 4, 7, y 9. ¿Cuántos son mayores de 700?

2. Averigua cuántos cuadrados se pueden trazar sobre la trama siguiente con la condición de que los vértices de cada cuadrado sean puntos de la trama:

```
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
*   *   *   *   *
```

* * * * *

3. Construye un sistema multiplicativo de base 8 y utilízalo para expresar los números 32768, 5400 y 89. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 8. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

4. Construye un sistema multiplicativo de base 5 y utilízalo para expresar los números del ejercicio anterior. Haz las transformaciones necesarias para convertirlo en un sistema posicional de base 5. Vuelve a escribir los números anteriores en el nuevo sistema.

5. En los siguientes ejercicios suponemos que todos los sistemas de numeración son posicionales. Lo único que puede variar es la base del sistema.

a. ¿En qué base debe escribirse el número 17 para que se convierta en el 21?
b. ¿En qué base debe escribirse el número 326 para que se convierta en el 2301?
c. ¿En qué sistema de numeración se verifica que 55+43 = 131?
d. ¿En qué sistema de numeración se verifica que 54 x 3 = 250?

6. Sabiendo que en un cierto sistema de numeración se tiene que 36 + 45 = 103, calcula el producto 36 x 45 en dicho sistema.

7. Halla la base del sistema de numeración en el que el número 554 representa el cuadrado de 24.

8. En los sistemas de numeración de bases x y x +1, un número se representa por 435 y 326 respectivamente. Halla x y la expresión de dicho número en el sistema decimal.

9. Halla la base del sistema de numeración en el que los números 479, 698 y 907 están en progresión aritmética.

10. Un número de tres cifras en el sistema de base 7 tiene sus cifras invertidas en el sistema de base 9. ¿Cuál es ese número? Exprésalo en base decimal.

BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.
Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.
Castro, Enr, y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 123-150). Madrid: Síntesis.
Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.
Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
Ifrah, G. (1985).*Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.
Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 151-176). Madrid: Síntesis.
Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.
Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L. y Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (Sixth edit.). New York: John Wiley.
Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª ed.). New York: Longman.
Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 2:

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ADICIÓN Y SUBSTRACCIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Ahora suma tu:

	1	7		2	5		1	6		1	9
+	2	6	+	2	8	+	3	4	+	1	3
		3									

2. Forma parejas que sumen la cantidad indicada en la casilla coloreada

9	18	10
2	8	4
14	9	16

3. Coloca en vertical y resta: 87-52 86-16 99-41

4. Calcula "de cabeza":
   8+11 49+11 725+11 77-11 100-11 340-11 418-11
   2+8+5+5+7 6+2+4+5+3

5. Escribe los sumandos y resultados que faltan:
   76+48=48+....
   120+....= 80 +120
   28+25+35=28+.....=......

6. Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa. ¿Cuántos tiene de fresa?

7. Juan tiene caramelos y le regala 3 a su hermana. Si le quedan 10, ¿cuántos caramelos tenía al principio?

8. En una carrera, Laura llegó la octava, 3 puestos antes que Beatriz. ¿En qué puesto llegó Beatriz?

9. Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?

10. Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan ?

11. Patricia mide 15 cm. más que su hermano Pedro y 5 cm. menos que su hermano Juan. ¿Qué diferencia hay entre la altura de Pedro y Juan?

12. Para hacer un collar Miriam emplea 25 perlas rojas, 30 perlas azules y 45 perlas verdes. Calcula el número de perlas que tiene el collar.

13. Escribe con números y símbolos matemáticos: tres mil doscientos mas cuatro mil ochocientos es igual a cuatro mil ochocientos más tres mil doscientos.

14. Un tren sale de Robledo con 480 pasajeros. En Castillejo bajan 35 y suben 46. ¿Cuántos viajeros quedan ahora en el tren?

15. Calcula mentalmente estas sumas. Piensa primero en qué orden es más fácil hacerlas:

75+25+48	27+56+13	84+91+9
275+18+25	47+35+65	350+50+68

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTRUCTURA LÓGICA DE LAS SITUACIONES ADITIVAS DE UNA ETAPA

1.1. Situación introductoria

Resuelve los siguientes problemas poniendo al lado de cada uno de ellos una, dos o tres cruces según su grado de dificultad.

1. Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa.¿Cuántos tiene de fresa?
2. Juan tiene caramelos y le regala 3 a su hermana. Si le quedan 10, ¿cuántos caramelos tenía al principio?
3. En una carrera, Laura llegó la octava, 3 puestos antes que Beatriz. ¿En qué puesto llegó Beatriz?
4. Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?
5. Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan?
6. Patricia mide 15 cm. más que su hermano Pedro y 5 cm. menos que su hermano Juan. ¿Qué diferencia hay entre la altura de Pedro y Juan?.

1.2. Situaciones que dan sentido a las operaciones de suma y resta de números naturales

Las operaciones aritméticas de suma y resta se construyen inicialmente como un medio de evitar los recuentos o procesos de medida en situaciones parcialmente cuantificadas. Si, por ejemplo, hemos contado 20 objetos por un lado y 35 por otro y nos preguntan que cuántos hay en total, podemos decir que hay 55 objetos en total, sin necesidad de efectuar ningún nuevo recuento, gracias a que "sabemos sumar"; y si nos preguntan qué diferencia hay entre las dos primeras colecciones de objetos, podemos decir que se diferencian en 15 objetos, sin necesidad de nuevos recuentos, gracias a que "sabemos restar" .

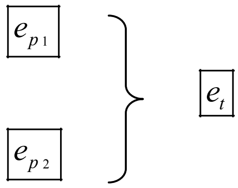
Las situaciones que dan sentido a la suma y a la resta de números naturales (situaciones aditivas de una sola operación) se clasifican atendiendo al *papel que juegan los números* que intervienen en ella, que es *variable* y puede ser:

- *estado* cuando los números del problema son el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud;
- *transformación* cuando un número expresa la variación que ha sufrido un estado;
- *comparación* cuando el número indica la diferencia que existe entre dos estados que se comparan entre sí.

Dependiendo de cuáles de estos papeles juegan los tres números que intervienen una situaciones aditivas de una sola operación, esto es, que se resuelven con una suma o una resta, obtenemos los siguientes tipos de situaciones:

Tipo 1: Estado -Estado -Estado (EEE)

En esta situación, tenemos una cantidad e_t que se refiere a un todo y dos cantidades e_{p1} y e_{p2} o partes en que descompone ese todo, es decir, tenemos la partición de un todo en dos partes. Se trata de una situación parte-todo[1] en la que todos los números son estados. Se representa mediante el diagrama:

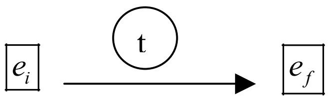


Ejemplos:

- Juan tiene 4 caramelos en la mano izquierda y 7 en la derecha. ¿Cuántos tiene en total?
- Juan tiene 11 caramelos. Cinco de ellos son de limón, los otros de fresa. ¿Cuántos tiene de fresa ?

Tipo 2: Estado -Transformación -Estado (ETE)

En esta situación tenemos una cantidad e_i que se refiere al estado inicial de un objeto o colección de objetos y una cantidad e_f que indica el estado final del objeto o de la colección. La cantidad t cuantifica la transformación sufrida por el objeto. La situación se representa mediante el diagrama:

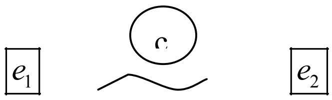


Ejemplos:

- Laura está la quinta en una cola para coger entradas para el circo. Deja que tres amigos pasen delante de ella. ¿Qué lugar ocupa ahora ?
- Juan tiene 7 caramelos. Regala 3 a su hermana. ¿Cuántos le quedan?

Tipo 3: *Estado -Comparación -Estado (ECE)*

Es una situación en la que se comparan dos estados e_1 y e_2. La cantidad c cuantifica la relación entre dichas cantidades. La situación se representa mediante el diagrama



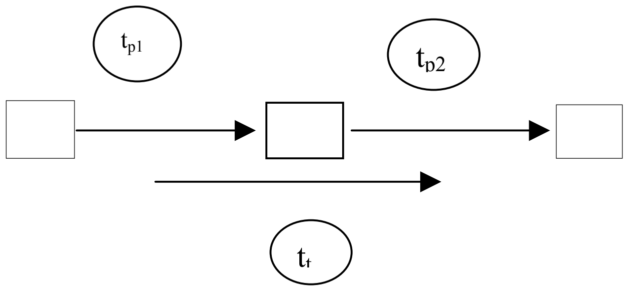
Ejemplos:

- Juan tiene 8 caramelos. Tiene 5 más que Pedro. ¿Cuántos tiene Pedro?
- Juan tiene 8 caramelos. Pedro tiene dos más. ¿Cuántos tiene Pedro?

[1] *Situaciones parte-todo.* Son aquellas en las que se tiene un todo o total descompuesto en dos partes. Se conocen dos de las cantidades y se quiere averiguar la tercera.

Tipo 4: *Transformación -Transformación -Transformación (TTT)*

Es una situación parte-todo en la que el objeto sufre una primera y después una segunda transformación. Las cantidades t_{p1} y t_{p2} se refieren a estas transformaciones y la cantidad t_t indica la transformación total. La situación se representa mediante el diagrama:

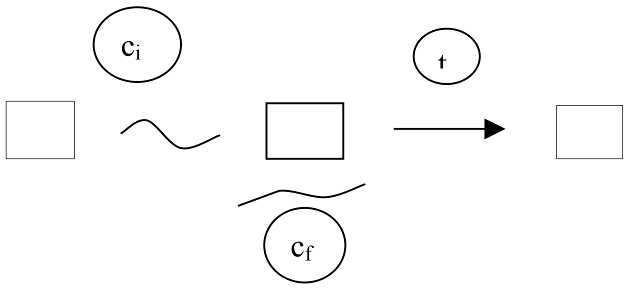


Ejemplos:

- Pedro gana 5 canicas por la mañana. Pierde 9 por la tarde. ¿Cuántas ha ganado o perdido en total?
- A María le dan 200 ptas. por la mañana. Le vuelven a dar 500 ptas. más por la tarde. ¿Cuánto dinero le han dado en total ?

Tipo 5: *Comparación -Transformación -Comparación (CTC)*

Situación en la que se establece una comparación inicial c_i entre dos cantidades, posteriormente una de las cantidades sufre una transformación t y, por último, c_f representa la comparación entre las cantidades finales. La situación se representa mediante el diagrama:

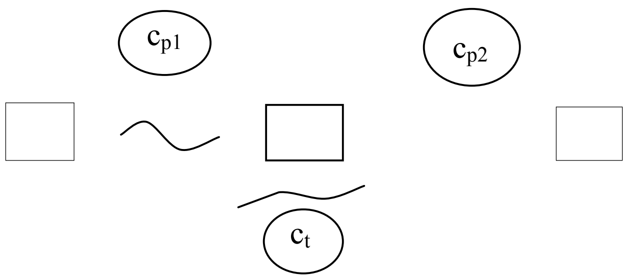


Ejemplos:

- Pedro tiene 6 caramelos más que Juan. A Juan le dan algunos más y ahora tiene un caramelo más que Pedro. ¿Cuántos caramelos le han dado a Juan?
- Pedro tiene 5 caramelos menos que Juan. A Juan le dan dos. ¿Quién tiene ahora menos caramelos? ¿ Cuántos menos?

Tipo 6: *Comparación -Comparación -Comparación (CCC)*

Situación parte-todo en la que c_{p1} expresa la comparación entre una primera y una segunda cantidad, c_{p2} indica la comparación entre la segunda y una tercera cantidad y c_t establece la comparación entre la primera y la tercera cantidad. La situación se representa mediante el diagrama



Ejemplos:

- Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 3 más que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?
- Pedro tiene 8 caramelos más que María. María tiene 5 menos que Juan. ¿Quién tiene más, Pedro o Juan? ¿Cuántos más?

En los seis tipos de situaciones nos encontramos con dos datos (cantidades conocidas) y una incógnita (cantidad desconocida que hay que encontrar a partir de los datos). Ahora bien, un simple examen de los ejemplos propuestos nos hace ver que dentro de cada tipo existe un gran abanico de situaciones posibles con diferencias sustanciales. Esas diferencias se deben a los distintos valores que pueden tomar las variables de las que hablamos a continuación. Además, el que la incógnita se obtenga mediante una suma o una resta de los datos depende de la posición que ocupa dentro de la situación y del sentido de las transformaciones o comparaciones que intervienen.

Por ejemplo, en los problemas de tipo 2 (estado - transformación - estado) obtenemos seis subtipos de problemas al considerar como dato o incógnita cada una de las tres cantidades que intervienen y si la cantidad inicial crece o disminuye, como se indica en la tabla siguiente:

	e_i	t	e_f	Crece	Decrece
Caso 1	Dato	Dato	Incógnita	*	
Caso 2	D	D	I		*
Caso 3	D	I	D	*	
Caso 4	D	I	D		*
Caso 5	I	D	D	*	
Caso 6	I	D	D		*

Las variables que intervienen en las situaciones aditivas son las siguientes:

- *Significado de los números:* que pueden ser cardinales, ordinales o medidas.
- *Papel de los números en la situación:* pueden ser estados, transformaciones o comparaciones.
- *Posición de la incógnita:* la incógnita puede ser el total o una de sus partes (en las situaciones parte-todo) o bien, el término inicial, medio o final (en las demás situaciones).
- *Sentido del término medio* (*situaciones II, III y V):* puede indicar un aumento o una disminución del término inicial (si se trata de una transformación) o bien, puede indicar que el término inicial es mayor igual o menor que el término final (si es una comparación).

Ejercicios

1. Resolver oralmente e indicar el tipo de cada uno de los siguientes problemas según la clasificación de acuerdo con la estructura lógica y semántica de los problemas aditivos.

a) *Pedro* tiene 37 bolas, juega una partida y pierde 18 bolas, ¿cuántas bolas tiene después de la partida?
b) *Bernardo* juega una partida de bolas y pierde 17 bolas; después de la partida tiene 21 bolas. ¿Cuántas bolas tenía antes de jugar la partida?
c) *Claudio* tiene 19 bolas y juega una partida. Después de la partida tiene 35 bolas. ¿Qué ha pasado en la partida jugada?
d) *Pablo* juega dos partidas; en la primera gana 37 bolas y en la segunda pierde 18. ¿Cuántas bolas tiene al final?

e) *Bruno* juega dos partidas de bolas, una después de otra. En la segunda pierde 17 bolas. Al final de las dos partidas ha ganado 21 bolas. ¿Qué ocurrió en la primera partida?
f) *Carlos* juega dos partidas de bolas. En la primera partida gana 19 bolas. Juega una segunda partida. Después de estas dos partidas,ganó en total 35 bolas. ¿Qué ha pasado en segunda partida?

2. FORMALIZACIÓN DE LA OPERACIÓN DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS NATURALES

2.1. La adición de números naturales

En las situaciones y problemas anteriores hemos introducido la adición y substracción en el conjunto de los números naturales. Puesto que siempre que sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural, decimos que la suma es una *operación* en el conjunto de los números naturales. La substracción no es una operación en el conjunto de números naturales, pero si en el de los números enteros (que incluye los números negativos).

Estas operaciones se pueden dotar de diversos significados a partir de los cuales los niños pueden comprender sus propiedades básicas, lo que los preparará para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo. También se han formalizado desde el punto de vista matemático. A continuación introducimos diversas formalizaciones de estas operaciones conectándolas cuando sea posible con las situaciones concretas en que se apoyan.

Definición recursiva de adición (basada en los axiomas de Peano)

Esta manera de definir la suma corresponde a uno de los aspectos del aprendizaje de la noción de adición por los niños: "el seguir contando". En la práctica se puede decir que "Sumar es seguir contando", mientras que restar consiste en "contar hacia atrás" (descontar).

Al estudiar los números naturales vimos como se podían definir estos números a partir de los axiomas dados por Peano. A partir de ellos es posible definir la adición en forma recursiva, partiendo de un número p cualquiera y de su siguiente sig(p). Esta es la definición:

- $p + 0 = p$ para todo número natural p.
- $p + \mathrm{sig}(n) = \mathrm{sig}(p+n)$, para todo n diferente de cero.

En consecuencia, procedemos como sigue:

- Para sumar 1 a un número p se toma el sucesor del número p: $\mathrm{sig}(p) = p+1$
- Para sumar 2 se toma el sucesor del sucesor, etc.
- Se supone que se sabe sumar n al número p y para sumar (n+1) se toma el sucesor de n+p, o sea, $p + (n+1) = \mathrm{sig}(p+n) = (p+n) +1$.

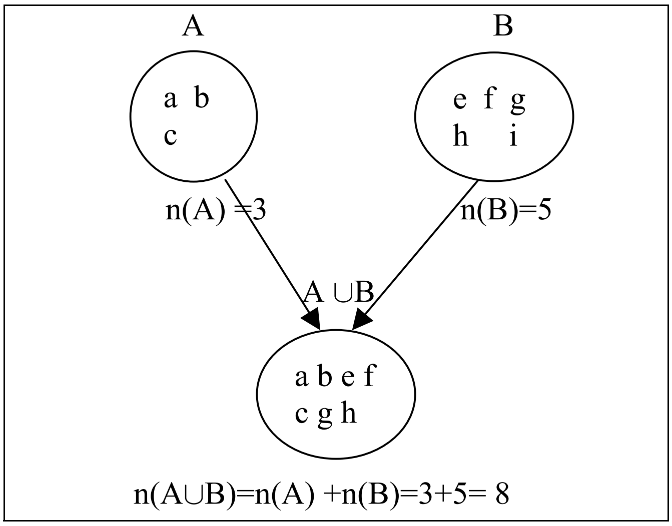
Podemos comprobar cómo con esta definición encontramos la suma de dos números cualquiera. Por ejemplo:

$$4+3 = 4+ \mathrm{sig}(2) = \mathrm{sig}(4+2) = \mathrm{sig}\,(4+\mathrm{sig}\,(1)) = \mathrm{sig}(\mathrm{sig}\,(4+1)) = \mathrm{sig}\,(\mathrm{sig}\,(4+\mathrm{sig}\,(0)) =$$
$$= \mathrm{sig}\,(\mathrm{sig}\,(\mathrm{sig}\,(4+0))) = \mathrm{sig}(\mathrm{sig}\,(\mathrm{sig}\,(4))) = \mathrm{sig}(\mathrm{sig}(5)) = \mathrm{sig}(6) = 7.$$

Es decir, 4 + 3 es el número que obtienes al empezar a contar desde cuatro y hallar los tres números siguientes.

Definición conjuntista:

En el modelo de conjuntos partimos de la idea de cardinal, que responde a la pregunta básica: ¿cuántos hay? La adición se interpreta como el cardinal obtenido al unir dos conjuntos, como mostramos en el siguiente esquema:



Definición: Dados dos números naturales a, b, se llama suma a+b al cardinal del conjunto A∪B, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b, respectivamente.

Esta definición pone en juego dos operaciones bien distintas:

Por una parte la operación que se hace sobre los conjuntos (se reunen dos colecciones que no tienen ningún elemento en común para formar una nueva colección con la totalidad de los elementos que pertenecen a cada uno de ellos.

Por otra parte la operación que resulta al nivel de los números de elementos (cardinales) que contienen, operación que es la adición de dichos cardinales.

Propiedades:

- Clausura: La suma de dos números naturales es otro número natural.
- Asociativa: (a+b)+c = a+(b+c)
- Commutativa: a+b = b+a
- Existencia de elemento neutro: el natural 0; a+0=0+a = a, $\forall$ a $\in$ N

Al tener la propiedad de clausura, la adición es una ley de composición interna en N. Esto quiere decir que a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, que suele llamarse la suma de ambos números.

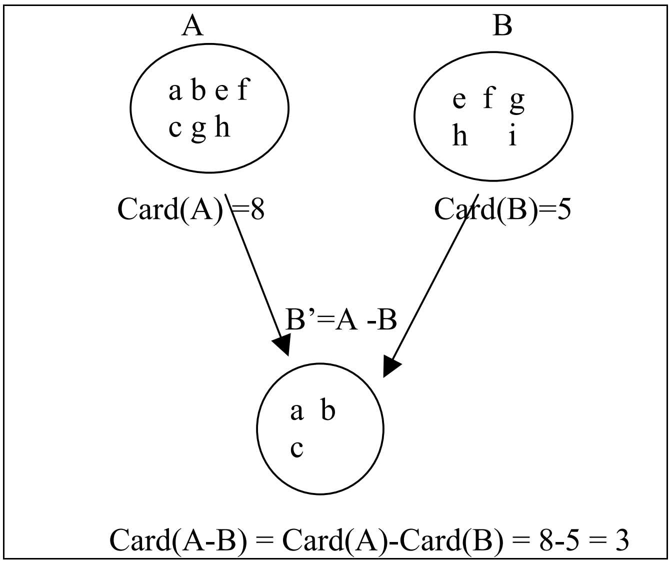
También se usa el término *operación,* que se define de una manera menos estricta y más general que la noción de ley de composición interna. Designa a cualquier procedimiento que da lugar a algoritmos de cálculo. Se habla frecuentemente de las cuatro operaciones en N: la adición, la sustracción, la multplicación y la división entera.

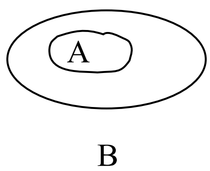
2.2. La sustracción de números naturales

Todas las operaciones de N no son leyes de composición interna en N: por ejemplo, la diferencia (3-5) no es un resultado en N: se dice que su cálculo es imposible, por lo que la sustracción no es una operación interna en N. Igual ocurre con la división entera, la cual a un par de números naturales hace corresponder un par de números bajo la forma de un cociente y un resto. A continuación presentamos algunos modelos y formalizaciones de la substracción.

Definición conjuntista:

En el caso de la substracción y si el substraendo es menor que el minuendo, se puede representar mediante la operación conjuntista de complementación. En este caso tenemos un conjunto A con a elementos, un subconjunto propio B con b elementos y la diferencia entre a y b será el cardinal del complementario de A, es decir del conjunto A-B, como mostramos en el siguiente esquema:



Dados $b <$ a, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces a-b = Card (B'), donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A. Ejemplo: Tengo 427 ovejas,vendo 123, ¿Cuántas me quedan?	

Definición "sumando desconocido"

En esta definición se parte de la operación de adición. La adición es la operación inversa a la misma.

Si $a < b$, de modo que $a + \square = b$ tiene como solución un número natural, entonces b-a es el "sumando desconocido" en esa ecuación: $a + \square = b$.

Ejemplo: Hoy es 17, mi cumpleaños es el el dia 25, ¿cuántos días faltan?

Definición por comparación:

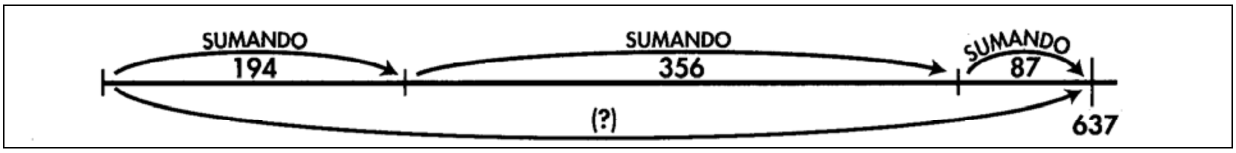
En esta definición se nuevo se parte de la idea de conjunto, pero no se requiere que uno de los conjuntos con los que se opera sea subconjunto propio del otro, basta con que pueda establecerse una correspondencia del primero con un subconjunto del segundo:

Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio A_1 de un conjunto B con b elementos, entonces b-a = Card(A'_1)

Ejemplo: En una reunión hay 87 chicos y 54 chicas. ¿Cuántos chicos hay más que chicas?

Definiciones de la suma y diferencia basadas en desplazamientos en la recta numérica

En este modelo los números naturales se interpretan geométricamente como distancias y la suma puede interpretarse como la distancia total cuando se combinan dos tramos consecutivos. Este modelo se encuentra con frecuencia en los libros de texto de Primaria, como en el ejemplo que reproducimos a continuación:



Tambièn podemos utilizar este modelo para la substracción, si a partir del primer término, en lugar de avanzar en la recta numérica se retrocede.

Dados $a < b$, para calcular la diferencia *b-a* se representa el número *b* sobre la recta numérica y se desplaza dicha posición hacia la izquierda *a* posiciones. La posición final alcanzada es el valor de *b-a*.

a veces

0 b-a __ __ __ .... __ b

Se puede decir que "restar es contar hacia atrás", o simplemente "descontar".

Propiedades de la sustracción en N

Las propiedades de la substracción no son las mismas que la de la adición, aunque los alumnos con frecuencia las confunden. A continuación analizamos estas propiedades.

- No es una ley de composición interna en N, ya que algunas "diferencias" como 2-5 no existen en N (*a-b* da un resultado negativo cuando $a<b$). Sin embargo, sí podemos decir que la sustracción es una operación en N ya que es un medio que permite calcular ciertas diferencias.

- No es commutativa, puesto que si *a-b* existe, *b-a* no existe en N, salvo si $a = b$, lo que sólo ocurre cuando $a-b = b-a = 0$. En una sustracción los dos términos de la diferencia no juegan el mismo papel: el primero, minuendo, es "pasivo" (sufre la sustracción); el segundo, sustraendo, es "activo", es lo que se sustrae.
- No es asociativa, es decir que en un encadenamiento de dos sustracción, el orden en el cual se efectúa las sustracciones -siempre que sean posibles- influye en el resultado final.

Vemos que la sustracción no posee algunas propiedades "agradables" de la adición que proporcionan una gran libertad en los cálculos de las sumas. Sin embargo, tiene algunas propiedades que son útiles en el cálculo mental:

a) Cualesquiera que sean los naturales *a, b, c*, siempre que $a>b+c$ se tiene siempre que:
$a-(b+c) = (a-b)-c$.

Es decir que para restar una suma a un número, se puede restar sucesivamente al número cada término de esta suma. Ejemplo: 38-16 = (38 – 6) – 10 = 32-10=22.

b) Cualquiera que sean los naturales *a, b, c*, si $a > b$ se cumple siempre:
$(a+c) - (b+c) = a-b$;
Y siempre que $a>b>c$, se tiene también: $(a-c) - (b-c) = a-b$.

Esto se puede enunciar diciendo que una difererencia no cambia si se suma, o bien se resta, un mismo número a cada uno de sus términos.

Esta propiedad es muy útil en el cálculo mental, sobre todo cuando el cálculo de la diferencia pone en juego "una llevada", ya que permite redondear el segundo término de la diferencia, lo que hace el cálculo más simple: Ejemplo: 35-18 = (35+2) –(18+2) = 37-20=17.

Esta propiedad interviene también en el algoritmo de cálculo en columnas de las diferencias.

3. TÉCNICAS DE CÁLCULO DE SUMAS Y RESTAS

3.1. Estrategias de obtención de sumas y restas básicas

En nuestro ámbito cultural aprendemos la tabla de sumar, y al preguntar "ocho más siete" o "nueve menos tres" respondemos de inmediato y de forma automática. Otras personas o los niños no tienen las respuestas totalmente memorizadas y recurren a estrategias intermedias para obtenerlas, como las siguientes:

- Permutar términos. Preguntan "seis más cinco" y contestamos "cinco más seis, once".
- Buscar los dobles. Preguntan "seis más siete" y pensamos "seis más seis, doce, más uno, trece" o "siete y siete, catorce, menos uno, trece".
- Completar a diez o cinco. Preguntan "ocho y seis" y pensamos "ocho y dos, diez, y cuatro, catorce"; o preguntan "trece menos siete" y pensamos "trece menos tres, diez, menos cuatro, seis"; o preguntan "'siete menos tres" y hacemos "siete menos dos, cinco, menos uno, cuatro".
- Sumar en vez de restar. Preguntan "trece menos seis" y pensamos "seis y siete, trece, siete" .

3.2. Técnicas orales (o mentales) de suma y resta

El cálculo mental, es decir, el que se hace sin herramientas tales como calculadoras o algoritmos escritos, se recomienda en las orientaciones curriculares y libros para profesores, por dos razones principales[2]:

La primera es que durante el período de la llamada "matemática moderna", se puso el acento en la justificación de los algoritmos, asimilando la construcción y comprensión de una noción matemática, y privilegiando el estudio del objeto matemático y sus propiedades, suponiendo que el resto de destrezas se adquiría por "añadidura". El cálculo mental, y los problemas de aplicación, se consideraban como vestigios de una pedagogía obsoleta.

En la actualidad se considera que en lugar de presentar directamente muchos conceptos y propiedades, pueden ser utilizados y experimentados por los niños, por medio de actividades tradicionalmente llamadas de "cálculo mental". De este modo, los diferentes pasos del algoritmo, y las propiedades de las operaciones, se pueden introducir e interpretar durante los ejercicios de cálculo mental. Suponemos también que las sesiones en clase no son para lucimiento de los alumnos dotados, sino se plantean discusiones, comparaciones, validaciones de los diferentes métodos ensayados por los niños, esto es, de reflexiones sobre las justificaciones de estos métodos. Por este motivo el calculo mental se suele llamar también cálculo reflexivo o razonado.

[2] Maurin y Johsua (1993, p.38-39)

La segunda razón, es que, lejos de entrar en competencia con la calculadora, el cálculo mental, asociado al aprendizaje de la estimación, es un auxiliar recomendado, para prever y anticipar un resultado numérico complejo, es el medio de control privilegiado de errores de tecleo en la calculadora.

El cálculo mental se puede poner en práctica:

- En las sesiones de control para verificar el conocimiento de las tablas, propiedades de las operaciones, 9 + 3 y 3 + 9; 0 x 8'7 + ? = 10; 10 - 7 = ?; ...
- Como puesta en funcionamiento y apoyo para la introducción de cálculos escritos más complejos, o para justificar y mostrar los mecanismos del algoritmo escrito;
- Como anticipación o verificación de un resultado, durante un cálculo automático;
- Finalmente, puede ser ocasión de uso en sesiones especiales de solución de "problemas abiertos", en el curso de las cuales se efectuará la puesta en común de las soluciones mediante la explicitación de los diferentes métodos realizados por los niños.

La existencia de dos sistemas de numeración, uno oral y otro escrito, que tienen características diferentes, da lugar a que las técnicas de cálculo asociadas a cada uno de ellos sean también distintas y deban ser estudiadas por separado.

Las técnicas orales se basan en la retención en memoria de los números que se operan, así como de los resultados de dichas operaciones. Las limitaciones de nuestra memoria exige técnicas basadas en números sencillos, que son más fáciles de recordar y operar. Por tanto, el objetivo de dichas técnicas es "redondear", es decir, conseguir números intermedios "redondos" que faciliten las operaciones y la retención en memoria. Son las siguientes:

- Permutar términos. Consiste en intercambiar el orden de sumandos o sustraendos[3]. Por ejemplo, en "veintitres más treinta y seis menos trece" decimos "veintitres menos trece, diez, diez más treinta y seis, cuarenta y seis".
- Suprimir o añadir ceros. Se prescinde de los ceros finales que se vuelven a añadir posteriormente. Por ejemplo, en "ciento cincuenta más ochenta" podemos decir "quince más ocho, veintitres, doscientos treinta".
- Descomponer términos. Se descompone uno o varios términos en sumandos o sustraendos. Por ejemplo, en "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos veintitres" decimos "quinientos ochenta y cinco menos cuatrocientos, ciento ochenta y cinco, menos veinte, ciento sesenta y cinco, menos tres, ciento sesenta y dos". También en "ciento noventa y seis más veintisiete" podemos decir "veintisiete es veintitres más cuatro, ciento noventa y seis más cuatro, doscientos, doscientos veintitres".
- Compensar términos. En una suma, sumar a un sumando lo que se substrae a otro. En una resta, sumar o restar la misma cantidad a los dos términos. Por ejemplo, "treinta y ocho más cincuenta y cuatro es lo mismo que cuarenta más cincuenta y dos, noventa y dos". Otro ejemplo, "noventa y nueve menos cuarenta y seis, cien menos cuarenta y siete, cincuenta y tres".

Otras técnicas orales más particulares, como,

- las técnicas de sumar (o restar) 9: se suma (resta) una unidad a las decenas y se resta (suma) una unidad a las unidades;
- la de sumar (o restar) 11: se suma (resta) una unidad a las decenas y otra a las unidades, etc.

[3] A los términos de una suma se les llama sumandos. En una resta, al primer término se le llama minuendo y al segundo sustraendo.

3.3. Técnicas escritas de suma y resta

Las técnicas escritas o algoritmos de suma y resta se construyen a partir de nuestro sistema de numeración escrito. Un algoritmo es una sucesión de reglas a aplicar, en un determinado orden, a un número finito de datos para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado. No exigen una toma de decisiones sino simplemente la puesta en marcha de un proceso que se compone de una sucesión de ordenes inequívocas. Las reglas que constituyen el algoritmo de la suma para dos o más sumandos son:

- Se escriben los sumandos uno debajo de otro de manera que las unidades de un mismo orden de los diferentes números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del último sumando.
- Se suman las cifras que se encuentran en la columna de la derecha.
- Si el resultado de la suma es menor que 10 se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a sumar la columna siguiente.
- Si el resultado de la suma es mayor o igual que 10 se escriben las unidades en la columna y la cifra de las decenas se añade a la suma de la columna siguiente.
- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última columna. El resultado de sumar la última columna se escribe íntegro debajo de la raya.
- El número que aparece bajo la raya es la suma de dichos sumandos.

Ejercicio

2. Escribe la tabla de sumar en base cinco y utilízala para realizar la siguiente suma: $135_{(5} + 431_{(5}$. Justifica el algoritmo indicando las propiedades de la adición y las reglas del sistema de numeración usadas.

Las reglas que definen el algoritmo de la resta son:

- Se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de manera que las unidades de un mismo orden de los dos números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del sustraendo.
- En la columna de la derecha, si la cifra del minuendo es mayor o igual que la del sustraendo se restan y el resultado se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.
- Si la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo se le suman a la primera diez unidades, se efectúa la resta, se escribe el resultado en dicha columna debajo de la raya y se aumenta en una unidad la cifra del sustraendo situada en la columna siguiente. Se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.
- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última columna.
- El número que aparece bajo la raya es la resta de los dos números dados.

Ejercicios

3. Realiza la siguiente operación y explica el procedimiento seguido utilizando dibujos que simbolicen los distintos agrupamientos (representaciones gráficas simulando el uso de los bloques multibase y el ábaco):

$641_{(8} - 227_{(8}$

4. Calcula la siguiente suma de números expresados en base 12, indicando las propiedades de la adición y las reglas del sistema de numeración usadas:
$9A57_{(12} + 38B4_{(12}$

5. Efectúa la siguiente sustracción de números naturales expresados en base 8, usando el algoritmo tradicional de "restar llevando", indicando las propiedades de la resta y del sistema de numeración correspondiente: $7452_{(8} - 6103_{(8}$

Estos algoritmos se complementan con una "cantinela" oral. En el caso de la suma de 457 y 895 decimos, por ejemplo: "siete y cinco, doce, llevo una, nueve y una, diez, y cinco, quince, llevo una, cuatro y una, cinco, y ocho, trece". Y en el caso de la resta 435- 277 decimos: "del siete al quince, ocho, llevo una (o bajo una), siete y una, ocho, del ocho al trece, cinco, llevo una, dos y una, tres, del tres al cuatro, una".

3.4. Justificación de las técnicas escritas de suma y resta

La justificación de los algoritmos escritos se basa en propiedades de la suma y resta de números naturales y del sistema de numeración escrito.

En el caso de la suma, la posibilidad de descomponer los números en unidades y la utilización conjunta de las propiedades asociativa y conmutativa, permite transformarla en sumas parciales de unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc. Cuando en una de esas sumas parciales obtenemos un resultado de dos cifras quiere decir qur esa unidad se compone de diez o más elementos y, por tanto, según las reglas de nuestro sistema de numeración escrito, todo lo que supera la decena debe ser trasladado a la unidad superior siguiente, lo que justifica la técnica de la llevada.

En el caso de la resta, las propiedades que dicen que "restar una suma es lo mismo que restar cada uno de los sumandos" y que "sumar una cantidad y restar otra es equivalente a restar, en primer lugar, la segunda cantidad y sumar después la primera" son las que permiten descomponer la resta global en restas parciales de unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.

La justificación de la técnica de la llevada es aquí más compleja. Si en una columna nos encontramos con que la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo esa resta parcial, en principio, no se puede efectuar. Para salvar el escollo podemos tomar una unidad de la cifra del minuendo situada en la columna inmediatamente siguiente (hacia la izquierda) y trasladarla a la columna que estamos intentando restar. En esta columna esa unidad de orden superior se transforma en diez unidades que se suman a las ya existentes en la cifra del minuendo y permiten efectuar la resta. Pero ahora, al pasar a la columna siguiente nos encontramos con que a la cifra del minuendo hay que restarle una unidad que ya hemos consumido en la resta parcial anterior. El hecho de que, en vez de restarle una unidad a la cifra del minuendo, se la sumemos a la cifra del sustraendo se basa en una propiedad de la resta que dice que "en una resta restar un determinado número al minuendo equivale a sumar ese mismo número al sustraendo" .

En cuanto a la parte oral de los algoritmos de suma y resta su justificación viene dada por la fluidez que producen en el desarrollo del algoritmo. En el algoritmo de la suma:

- facilita la obtención de los hechos numéricos básicos;
- ayuda a retener en memoria la llevada.

En el algoritmo de la resta:

- refuerza la estrategia de "sumar en vez de restar" a la hora de obtener los hechos numéricos básicos;
- permite modificar directamente el minuendo en función del tamaño del sustraendo;
- ayuda a retener en memoria la llevada.

Ejercicios

6. Justifica las operaciones siguientes, indicando qué propiedades se emplean: (20+2)+(30+8)= 20+(2+ (30+8))=20+ ((30+8)+2)=20+(30+(8+2))=20+30+10=60.

7. ¿Cuál de los siguientes conjuntos numéricos es cerrado para la adición? Si uno de ellos no es cerrado para la adición, indica el por qué.
{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, ...}
{1, 2, 3, 4, ...1000}
{0, 3, 6, 9, 12, 18,....}

3.5. Otras técnicas escritas de suma y resta: ejemplos

a) Algoritmo extendido de suma

Este algoritmo evita el problema de las llevadas, pero ocupa bastante más espacio en el papel y en sumas de más de dos sumandos o de números grandes puede resultar farragoso. No es de uso común, aunque algunas personas lo proponen como posible algoritmo de iniciación en la escuela.

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 9 & 2 \\ & 5 & 3 & 9 \\ \hline & & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ 1 & 3 & & \\ \hline 1 & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

b) Algoritmo de suma o resta con llevada escrita

Se trata de los algoritmos estándares con la diferencia de que el apoyo oral para recordar la llevada es sustituido por un apoyo escrito: la llevada se escribe al comienzo de la columna siguiente, en el caso de la suma, o como un superíndice de la cifra del sustraendo a la que afecta, en el caso de la resta. La enseñanza de los algoritmos suele iniciarse con la llevada escrita acompañada de la cantinela para producir un doble refuerzo, oral y escrito. Posteriormente, el refuerzo escrito se abandona.

c) Algoritmo de resta sin llevadas

Sea la resta 4832- 457. Tomamos un número formado por tantos nueves como cifras tenga el minuendo y le restamos 457. Al resultado de dicha operación le sumamos 4832 y al número así obtenido, 14374, le quitamos la unidad de orden superior y se la añadimos a la cifra de las unidades, con lo que queda el número 4375, que es el resultado de la resta.

Es un algoritmo muy poco usado pues, aunque tiene la ventaja de que no produce llevadas, alarga las operaciones y su justificación es compleja. Se basa en que a la resta 4832 -457 se le puede sumar y restar el número 9999 sin que el resultado de la resta se vea modificado.

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 9 & 9 & 9 \\ & & 4 & 5 & 7 \\ \hline & 9 & 5 & 4 & 2 \\ & 4 & 8 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 7 & 4 \end{array}$$

Tendremos entonces: 4832- 457 = 9999 + 4832- 457- 9999 = 9999- 457 + 4832- 9999. Pero restar 9999 es lo mismo que restar 10000 y sumar 1 con lo que resulta: 4832- 457 = 9999- 457 + 4832- 10000 + 1 que es el procedimiento definido en el algoritmo.

d) Algoritmo de resta de "tomar prestado"

Aquí se hace actuar la llevada sobre el minuendo de manera que en vez de añadir una unidad al sustraendo se le resta al minuendo, lo que se expresa tachando la cifra del minuendo y escribiendo encima de ella una cifra que sea una unidad menor. Este algoritmo se enseña en muchos países. Tiene la ventaja de que su justificación es más sencilla que la del nuestro, pero a cambio deben estudiarse como casos especiales aquellos en los que alguna cifra del minuendo sea cero mientras que nuestro algoritmo no genera excepciones. Actualmente, en muchas escuelas españolas se empieza enseñando este algoritmo para pasar después al algoritmo tradicional.

$$\begin{array}{r} \,7\;2\; \\ 4\;\cancel{8}\;\cancel{3}\;2 \\ 4\;5\;7 \\ \hline 4\;3\;7\;5 \end{array}$$

Ejercicios

8. Efectúa las operaciones siguientes en las bases que se indican, empleando el algoritmo de llevada escrita:
a) $10111_{(2} + 1101_{(2}$
b) $11001_{(2} - 1011_{(2}$
c) $4253176_{(8} + 3247615_{(8}$
d) $2055_{(8} - 1267_{(8}$

9. Completar la suma y la resta “con huecos” siguientes:
a) $(3\square 5) + (\square 5\square) = 764$
b) $(\square\square 5) - (45\square) = 346$

10 ¿En qué base b se ha realizado la siguiente suma: $437_{(b} + 465_{(b} = 1013_{(b}$?

Ejercicios

11. Describir la estrategia seguida en los ejemplos siguientes:
a) 371 + 634 = 1000 +1+4
b) 615 -234: (615-200), 415, -34, (415-30), 385, -4, 381.
c) 73 - 27: 53 - 7, 56 - 10, 46

3.6. Uso de la calculadora en la solución de problemas aditivos[4]

Desarrollar las técnicas de cálculo escrito y mental es indispensable, pero el papel de las calculadoras de bolsillo simples no se debe descuidar en estos primeros niveles del aprendizaje matemático. Parece difícil evitar el encuentro con estas herramientas que han hecho su aparición en casi todos los hogares. En lugar de ver en ellas un enemigo de las técnicas de cálculo mental o escrito, sería preferible tratar de hacer de la calculadora un aliado que puede ser beneficioso.

En primer lugar, después de una fase de descubrimiento del teclado del aparato y de sus comandos, se toma conciencia de que el formalismo que se utiliza durantes los cálculos

[4] Maurin y Johsua (1993, p.41)

escritos es también una herramienta de comunicación con la máquina que no "comprende" sino escrituras correctas.

Mientras que el funcionamiento de la calculadora se domina al nivel de los cálculos de sumas, se puede convertir en una herramienta que permita al niño verificar la validez de un cálculo y de tener una autonomía mayor en su aprendizaje de las diferentes técnicas de cálculo. Contrariamente a lo que se podría pensar, esto no le quitará el compromiso de aprender a calcular. Además, se pueden organizar concursos en la clase sobre cálculos simples para mostrar que un alumno que domine bien el cálculo mental es capaz, en muchos casos, de calcular más deprisa que la máquina, que depende de la habilidad manual de su operario.

Por otra parte, durante la resolución de ciertos problemas, si el objetivo es trabajar sobre la relación entre la situación descrita por el enunciado y la elección de las operaciones a realizar, se podrá autorizar el uso de la calculadora para permitir a los alumnos consagrarse enteramente a su tarea de reflexión.

De igual modo, se pueden hacer ejercicios de investigación con ayuda de la calculadora, lo que puede favorecer el descubrimiento de ciertas relaciones entre los números al estar liberado del aspecto fastidioso de las largas series de cálculos y de tanteos que harían imposible el ejercicio, como ocurre en este caso:

- Encontrar tres enteros sucesivos cuya suma sea igual a 48.

Se pueden abordar algunas cuestiones sobre el orden de magnitud de un resultado, cuestión importante y delicada, que también se puede abordar bajo la forma de juego como el siguiente:

- Si sumo 19, 23 y 18, ¿se obtiene un resultado mayor que 50? Verificalo.

Problemas como los siguientes: $35 + ? = 73$; o $35 + ? = 28$ (sin solución en N), pueden también ser abordados y conducir, después de una fase de investigación suficiente y frecuentemente muy activa, a descubrimientos insospechados.

Cuestiones como la siguiente: “Teclear 7, a continuación, sin pulsar la tecla de borrar, hacer que aparezca en la pantalla 17 y explicar cómo se logra”, son también ejercicios excelentes sobre la numeración, que la herramienta transforma en sesión activa y dinámica para todos los alumnos.

Como conclusión podemos decir que la calculadora tiene de hecho su lugar desde los ciclos iniciales de primaria, bien como útil de auto-evaluación de ciertos cálculos, bien como herramienta que permite una reflexión a partir de los cálculos.

12. Empleando la función constante de la calculadora realiza las siguientes actividades

a) Cuenta de uno en uno, desde 0 hasta 50
b) Cuenta de 2 en 2 desde 0 hasta 80
c) Cuenta de 7 en 7 desde 0 a 91
d) Cuenta hacia atrás de 6 en 6 desde 60 hasta 0; anota el número 6 restado.
e) Cuenta hacia atrás de 3 en 3 desde 75 hasta 0; anota el número de 3 restado
f) Cuenta hacia atrás de uno en uno desde 25 hasta 0

13. a) Calcula 273 - 129 sin usar la tecla de restar; b)Calcula 273 + 129 sin usar la tecla de sumar

14. Calcular el valor exacto de la siguiente suma: 1234567890123456789 + 135714468012345678

15 . Calcula el valor exacto de la siguiente sustracción: 1357901234567890 - 1234567890246805

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Calcula las siguientes sumas:

   1 + 11 =

   1 + 11 + 111 =

   1 + 11 + 111 + 1111 =

   ¿Cuál es el patrón que siguen?

   ¿Cuántos sumandos tiene la expresión en la que falla el patrón por primera vez?

1. El modelo de conjuntos para la adición se puede visualizar con materiales manipulativos, o con configuraciones puntuales, tales como los números triangulares Tn:

```
T1=1   T2= 3   T3=6   T4= 10,...
 *       *       *       *
         **      **      **
                 ***     ***
                         ****
```

a) ¿Puedes escribir el número triangular T10?

b) ¿Puedes encontrar una expresión general para el número triangular Tn?

c) ¿Puedes mostrar que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado (es decir el cuadrado de un número natural)?

3. Te proponemos realizar la siguiente actividad:

3	18	7	100
15	11	93	97
4	82	4	82

a. Dibuja cuatro casillas poniendo en cada una un número natural

b. En las tres primeras casillas de la 2ª fila pon la diferencia de los dos números en las dos casillas encima de ella.

c. En la última casilla de cada fila pon la diferencia entre los números en la primera y última casilla de la fila anterior

d. Repite el proceso añadiendo más filas. Se acaba la actividad si consigues una fila con todos ceros.

- ¿Crees que siempre se acabará este juego?
- ¿Puedes encontrar 4 números para poner en la primera fila de modo que se acabe en un solo paso? ¿en ocho pasos?

4. Debajo te presentamos una tabla de sumar incompleta donde las filas y columnas se han permutado unas con otras. ¿Eres capaz de reconstruirla?

+	5				2				3
3									
				18					
			12						
		5			6				
0						0			
		8						14	
5									
					3				
8							16		

5. ¿Por qué si a un número cualquiera le restamos la suma de todas sus cifras se obtiene un múltiplo de 9? ¿Y si el número estuviese escrito en una base diferente de numeración, por ejemplo en base 5?

6. ¿Cómo podrías medir 1 litro de aceite si sólo tienes dos recipientes, uno de 7 litros y otro de cuatro?

7. Si se necesitan 600 cifras para numerar las páginas de un libro. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

8. Efectúa las siguientes operaciones en las bases que se indican:

$$\begin{array}{r} 1223_{(4} \\ 3032_{(4} \\ +\ 123_{(4} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha 10 \alpha 9_{(11} \\ +7654_{(11} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7267_{(8} \\ -\ 5671_{(8} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 245608_{(12} \\ -\ 196429_{(12} \\ \hline \end{array}$$

9. Una persona efectúa la resta 482 -153 de esta manera 282 + 47 = 329. ¿Es un procedimiento correcto?

10. A continuación se realizan algunas operaciones utilizando técnicas orales. Indica en cada caso las técnicas utilizadas.

a) 1573- 628, mil quinientos setenta y tres menos seiscientos, novecientos setenta y tres, menos veinte, novecientos cincuenta y tres, novecientos cincuenta menos cinco, novecientos cuarenta y cinco.

b) 197 + 322 + 38, trescientos treinta y treinta, trescientos sesenta, más doscientos, quinientos sesenta, menos tres, quinientos cincuenta y siete.

11. En una suma de dos términos ¿entre qué valores puede variar la llevada? ¿Y en una suma de tres términos? ¿Yen una de cuatro? ¿Y en una resta? ¿Y en una multiplicación? ¿Y en una división?

12. Utiliza el algoritmo de resta sin llevadas para restar 17829 de 34234.

13. Resuelve los siguientes problemas de sumas y restas. Indica, en cada caso, los valores de las variables que intervienen en la situación y el tipo de situación. Cuando intervengan varias operaciones en un mismo enunciado estúdialas por separado.

a) Los padres de Julia tienen 93.645 pesetas para los gastos de la casa durante el mes. Al final de mes han gastado 81.436 pesetas. ¿Cuánto han ahorrado?

b) Pedro tiene 12 años y María 8. ¿Cuántos años se llevan?

c) Un niño compró 15 chicles, perdió 7 y le regalaron 4. ¿Cuántos chicles tiene ahora?

d) Ignacio tiene 50 cromos más que Fernanda, que, a su vez, tiene 20 cromos menos que Adela, la cual tiene 80 cromos. ¿Cuántos cromos tienen Ignacio y Fernanda?

e) Luisa tiene 20 canicas de cristal y Carmen 15 canicas de barro. Al juntar sus canicas con las de Alberto habría 60 canicas en total. ¿ Cuántas canicas tiene Alberto?

f) A un partido de baloncesto asisten 526 socios del club local y 2.513 espectadores no socios. ¿Cuántos espectadores en total presencian el partido?

g) Andrés mide 9 cm. más de alto que su hermano Julio y 5 cm. menos que su hermana Sofía. ¿Qué diferencia de altura hay entre Sofía y Julio?

h) Eva tiene 2.000 pesetas más que Gloria. Gloria se gasta 500 ptas. ¿Quién tiene ahora más dinero? ¿Cuánto más?

i) La distancia de mi casa a la de un amigo es de 459 m. Salgo de mi casa y recorro 197 m. de esa distancia. ¿Cuántos metros me faltan para llegar a la casa de mi amigo?

14. Encuentra un número capicúa de 5 cifras sabiendo que el resultado de restar a dicho número el que se obtiene suprimiendo la cifra central es 12400.

15. Para efectuar una resta *a* - *b* se puede seguir el siguiente procedimiento: se escribe un número que tenga tantos nueves como cifras tenga el minuendo *a*, a ese número se le resta el sustraendo *b* y, posteriormente, al resultado se le suma el minuendo *a*; al resultado así obtenido se le suprime la cifra situada más a la izquierda, que será un 1, y esa cifra se le suma a las unidades. El número así obtenido resulta ser la diferencia *a-b*. Justifica por qué.

16. Resuelve los problemas que se enuncian a continuación utilizando métodos aritméticos.

a) Un padre de tres hijos dejó en herencia 1600 coronas. El testamento precisaba que el primogénito debía recibir 200 coronas más que el segundo, y el segundo 100 coronas más que el último. ¿Qué cantidad recibió cada uno de los hijos?

b) En una caja hay el doble de monedas que en otra. Si se pasan 7 monedas de la primera a la segunda caja, quedan en ambas el mismo número de monedas. ¿Cuántas monedas tenía al principio cada caja?

c) Un hombre debe llevar un mensaje a través del desierto. Cruzar el desierto lleva nueve días. Un hombre puede llevar únicamente alimento para 12 días. No hay alimento en el lugar donde debe dejarse el mensaje. Se dispone de dos hombres. ¿Puede llevarse el mensaje y volver sin que falte alimento?

d) Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió el aeroplano en total?

BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1988). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos. Madrid: Síntesis.

Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 3:

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTERA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Calcula y descubre un truco para recordar la tabla:

4x1	4x2	4x3	4x4	4x5	4x6	4x7	4x8	4x9	4x10
4									

2. Coloca en vertical y calcula: 34x2, 22x3, 71x4, 41x6

3. Expresa en forma de multiplicación y calcula: 557+557+557+557.

4. Copia y completa, como en el ejemplo: (5+8)x4= 5x4+8x4=20+32=52
   (9-6)x3=
   (7-5)x6=

5. En esta división hay algunos errores. Encuéntralos y corrígelos

$$
\begin{array}{r|l}
1526 & \underline{23\qquad\qquad} \\
\underline{-132} & 43 \\
203 & \\
\underline{-198} & \\
006 &
\end{array}
$$

6. Queremos vaciar un depósito que contiene 54 litros de agua utilizando un cubo en el que caben 9 litros. ¿Cuántos viajes tendremos que hacer?

7. Un objeto A pesa 18 quilos y un objeto B pesa tres veces menos que el A. ¿Cuánto pesa el objeto B?

8. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyos lados miden 8 y 6 cm, respectivamente?.

9. ¿Cuántas celdas tiene una tabla de 5 columnas y 3 filas?

10. Para celebrar un cumpleaños se han hecho varias bolsas. En cada una de ellas hay 5 paquetes de caramelos. Cada paquete tiene 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en cada bolsa?

11. Juan tiene una cantidad de dinero. Ignacio tiene 6 veces el dinero de Juan. Paco tiene la mitad del dinero de Ignacio. ¿Cuántas veces tiene Paco el dinero de Juan?

12. Dos automóviles han dado respectivamente cuatro y ocho vueltas a un circuito. El segundo recorrió 24.800 metros. ¿Cuál es la longitud del circuito? ¿Cuánto recorrió el primer coche?

13. Escribe todos los números múltiplos de 6 que sean menores que 100.

14. Expresa estos productos en forma de potencia: 7x7x7x7x7, 9x9x9

15. Escribe estos números en forma de potencia: 100.000, 1.000.000

16. Escribe los números entre 100 y 200 que tengan raiz cuadrada exacta.

17. Calcula: $\sqrt{1225}$, $\sqrt{2025}$

18. Calcula el valor aproximado de : 83x39, 31x51, 616x181, 624x38, 494x72, 72x48

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTRUCTURA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE UNA OPERACIÓN

1.1. Situación introductoria

A continuación presentamos una colección de problemas en cuya solución interviene la operación de dividir 20/3:

a) Resuelve los problemas

b) Explica las semejanzas y diferencias que encuentras entre estos problemas. Indica la clase de números que intervienen, las cantidades, operaciones y relaciones que se establecen entre estos elementos.

Problemas:

1) Disponemos de 20 pájaros a repartir en tres jaulas. ¿Cuántos pájaros se meterán en cada jaula?

2) Una pieza de 20 metros de tela se corta en trozos de 3 metros ¿Cuántos trozos resultan?

3) Repartimos una pieza de 20 metros de tela a tres modistas ¿Cuánta tela le corresponde a cada una?

4) Un camión de 3 toneladas de carga útil debe transportar 20 toneladas de carga ¿Cuántos viajes deberá hacer?

5) Si repartimos 20 pasteles entre 3 niños, ¿cuánto le toca a cada uno?

6) Pedro tiene 20 millones en acciones. Si el valor de la cotización en bolsa se reduce a la tercera parte, ¿cuánto dinero le queda?

7) Juan tiene una terraza rectangular de 20 m2. Si el ancho es de 3m, ¿cuál es el largo de la terraza?

1.2. Clasificación de los problemas multiplicativos

Así como las operaciones aritméticas de suma y resta se construyen inicialmente para abreviar los recuentos o procesos de medida, la multiplicación y división entera son un medio de abreviar los procesos de sumar (o restar) repetidamente una misma cantidad o repartir equitativamente una cantidad entre cierto número de seres u objetos. Por ejemplo, en lugar de sumar el número 6 nueve veces, decimos directamente que el resultado es 54, sin necesidad de efectuar las sumas repetidas, porque "sabemos multiplicar".

Las situaciones que dan sentido a la multiplicación y división entera (situaciones multiplicativas de una sola operación) se puede clasificar atendiendo *al papel que juegan los números* que intervienen en ellas que pueden ser:

- *estado*, cuando expresan el cardinal de un conjunto, el ordinal de un elemento o la medida de una cantidad de magnitud;

- *razón*, cuando expresan un cociente entre cantidades de magnitudes diferentes;
- *comparación*, cuando indican el número de veces que una cantidad de magnitud está contenida en otra cantidad de la misma magnitud.

Basándonos en esto, las situaciones multiplicativas de una sola operación se clasifican en:

Situación multiplicativa de razón (ERE): Situación en la que intervienen dos estados E_1 y E_2 que hacen referencia a magnitudes distintas y una razón R que expresa el cociente de E_2 respecto a E_1. Cuando la incógnita está en la razón R podemos interpretar la situación en términos de *reparto* equitativo y cuando está en el estado E_1 en términos de *agrupamiento* o descomposición en partes iguales.

Ejemplos:

- Juan compra 3 paquetes de cromos, cada uno de los cuales cuesta 25 pesetas. ¿Cuánto ha pagado en total?
- Un coche recorre 180 km. en dos horas. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

*Situación multiplicativa de comparación (ECE): I*ntervienen dos estados E_1 y E_2 que hacen referencia a una misma magnitud y una comparación C que indica el número de veces que hay que repetir uno de los estados para igualarlo al otro.

Ejemplos:

- Maria tiene 25 pesetas y su hermana Soledad 100. ¿Cuántas veces más dinero tiene Soledad que María?
- La varilla A mide 70 cm. de longitud y la varilla B mide 7 veces más que la A. ¿Cuánto mide la varilla B?

Situación multiplicativa de combinación (EEE): Intervienen dos estados E_1 y E_2 que expresan los cardinales de dos conjuntos o las medidas de cantidades de dos magnitudes y un tercer estado E_f que indica el cardinal del producto cartesiano de esos dos conjuntos o la medida de la cantidad de magnitud producto.

Ejemplos:

- En un baile hay 3 chicos y algunas chicas. Se pueden formar 6 parejas distintas entre ellos. ¿Cuántas chicas hay en el baile?
- En un ortoedro el área de la base es de 9 m^2 y la altura de 6 m. ¿Cuál es su volumen?

Situación multiplicativa de doble comparación (CCC): Situación en la que C_{12} expresa el número de veces que la primera cantidad de magnitud está contenida en la segunda, C_{23} indica el número de veces que la segunda cantidad de magnitud está contenida en la tercera y C_{13} establece el número de veces que la primera cantidad de magnitud está contenida en la tercera.

Ejemplo:

- Juan tiene un dinero. Ignacio tiene 4 veces el dinero de Juan. Paco tiene 5 veces el dinero de Ignacio. ¿Cuántas veces tiene Paco el dinero de Juan?

Las variables de los problemas multiplicativos, y los valores que pueden tomar, son los siguientes:

- *Significado de los números*: pueden ser cardinales, ordinales o medidas de cantidades de magnitud

- *Papel de los números en la situación:* pueden ser 'estados', 'razones' o 'comparaciones' (ya definidos al comienzo del apartado).
- *Posición de la incógnita:* puede ocupar uno cualquiera de los papeles adjudicados a las cantidades en la situación.
- *Sentido de la comparación:* indica si el primer término de la comparación es varias veces mayor o menor que el segundo término.

1.3. Construcción de las operaciones de multiplicación y división entera de números naturales

La experiencia acumulada en las situaciones anteriores permite construir la multiplicación y la división entera a partir de:

- la definición de los hechos numéricos básicos (tabla de multiplicar);
- el establecimiento de las propiedades de dichas operaciones;
- la invención de técnicas de cálculo eficaces (orales y escritas);
- la discriminación de las situaciones en las que el uso de dichas operaciones es pertinente.

Al igual que en el caso de la suma y la resta, esto supone un coste de memoria. También hay que advertir que así como, en la suma, resta y multiplicación a cada par de números les corresponde un único número, que es el resultado de la operación, en la división entera, dados dos números, el dividendo y el divisor, obtenemos como resultado otros dos números, el cociente y el resto[1]. Por tanto, la división entera es la técnica mediante la cual, dados dos números, D y d, podemos encontrar otros dos, q y r, tales que $D = dq + r$ y $r < d$.

Ejercicios:

2. Determina el menor número natural que multiplicado por 7 nos da un número natural que se escribe usando únicamente la cifra 1. ¿Y únicamente la cifra 2?

3. Expresa los números del uno al diez como resultado de operaciones entre números en las que, en total, intervengan cuatro treses.

4. Suponemos que los números naturales D y q son tales que D<4500, y q=82. La división entera del número D por d da como cociente q = 82, y resto r = 45. Buscar, justificando la respuesta, el conjunto de pares (D, d) que cumple dicha condición.

5. Resolver el problema anterior para r = 112. Discutir la existencia de soluciones según los valores del resto r.

6. Se resta de 3 en 3 a partir de 50 hasta que se obtiene el menor número natural posible: "50, 47, 44, 41, ..." ¿En qué número termina esta serie?

7. Se resta de 3 en 3 hasta obtener el menor número natural posible, pero a partir de 8932: "8932, 8929, 8926, ..." ¿En qué número termina esta serie? ¿Cuántos términos tiene esa secuencia de sustracciones? ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 100?

8. Sabiendo que 8562 = (34 x 251) +28

[1] Los términos de un producto se llaman factores. El primer término se llama también multiplicando y el segundo término multiplicador. Los términos de una división entera son el dividendo, el divisor, el cociente y el resto. Cuando en una división el resto es cero se dice que la división es exacta.

a) ¿Cuáles son el cociente y el resto de la división entera de 8562 por 34?
b) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división de 8562 por 251?

9. Sabiendo ahora que 18846610 = (4973 x 3789) + 3913
c) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división entera de 18846610 por 4973?
d) ¿Cuáles son el cociente y el resto en la división entera de 18846610 por 3789?

10. Sabiendo que 1261541 = (4897 x 257) + 3012. ¿Cuáles son los cociente y el resto en la división entera de 126154100 por 489700?

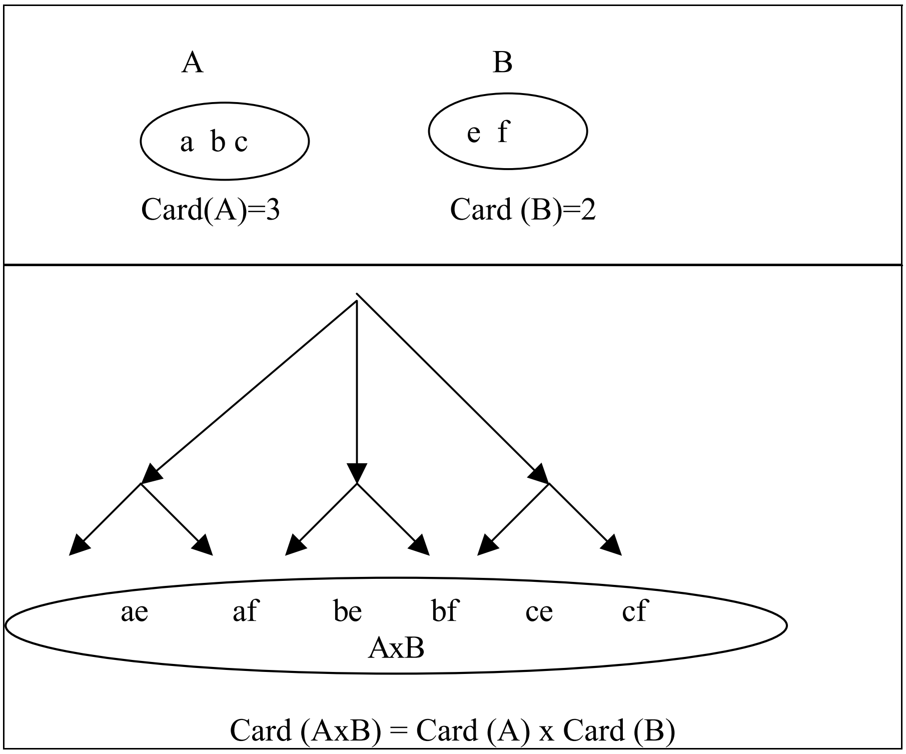
2. FORMALIZACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS NATURALES

En las situaciones y problemas anteriores hemos introducido la multiplicación y división entera en el conjunto de los números naturales. Puesto que siempre que multiplicamos dos números naturales obtenemos otro número natural, decimos que la multiplicación es una *operación* en el conjunto de los números naturales. La división no es una operación en el conjunto de números naturales, pero si en el de los números racionales (que incluye los números negativos).

Estas operaciones se pueden dotar de diversos significados a partir de los cuales los niños pueden comprender sus propiedades básicas, lo que los preparará para el aprendizaje y la comprensión de los algoritmos de cálculo. También se han formalizado desde el punto de vista matemático. A continuación introducimos diversas formalizaciones de estas operaciones conectándola cuando sea posible con los modelos concretos en que se apoyan.

Definición conjuntista de multiplicación

En esta definición se parte de la idea de producto cartesianos de conjunto. La multiplicación corresponde a la idea de repetición, pues al formar un producto cartesiano se repite cada elemento del primer conjunto junto a cada elemento del segundo. Recoge especialmente los problemas de combinación, como visualizamos en el siguiente esquema:



Definición: Dados dos números naturales a, b, se llama multiplicación axb al cardinal del conjunto producto cartesiano AxB, siendo A y B dos conjuntos cuyo cardinal es a y b, respectivamente.

Esta definición pone en juego dos operaciones bien distintas:

Por una parte la operación que se hace sobre los conjuntos (se combinan entre si dos colecciones formar una nueva colección con la totalidad de los elementos que pertenecen a cada uno de ellos; cada elemento de la nueva colección es un par (ab) donde a es un elemento del primer conjunto y b uno del segundo).

Por otra parte la operación que resulta al nivel de los números de elementos (cardinales) que contienen, operación que es la multiplicación de dichos cardinales.

Propiedades:

- Clausura: El producto de dos números naturales es otro número natural.
- Asociativa: (axb)xc = ax (bxc)
- Commutativa: axb = bxa
- Existencia de elemento neutro: el natural 1; ax1=1xa = a, $\forall$ a $\in$ N
- Distributiva respecto a la adición: ax(b+c) 0 axb+axc para cualquieras números a, b y c.

Al tener la propiedad de clausura, la multiplicación es una ley de composición interna en N. Esto quiere decir que a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural, que suele llamarse la suma de ambos números.

Definición recursiva de la multiplicación (basada en los axiomas de Peano)

Esta manera de definir la suma corresponder a uno de los aspectos del aprendizaje de la noción de adición por los niños: "repetir varias veces un mismo sumando".

Al estudiar los números naturales vimos como se podían definir estos números a partir de los axiomas dados por Peano. A partir de ellos es posible definir la multiplicación en forma recursiva, partiendo de un número p cualquiera y de su siguiente sig(p). Esta es la definición:

- px 1 = p para todo número natural p
- p x sig(n) = pxn+n, para todo n diferente de cero.

En consecuencia, procedemos como sigue:

- Como 2 es el siguiente de 1, p x2= pxsig (1)= px1+p= p+p; se suma dos veces el número p
- Para multiplicar el número por 3, como 3 el siguiente de 2, p x3= pxsig (2)= px2+p= p+p+p; se suma tres veces el número p
- Así sucesivamente

Podemos comprobar como con esta definición podemos encontrar el producto de dos números cualquiera. Por ejemplo:

4x3= 4x S(2)= (4x2)+4 = (4xS(1))+4 = (4x1+4)+4=4+4+4

Es decir, 4 x 3 es el número que obtienes al repetir cuatro tres veces.

Definición conjuntista de división con resto

Dados dos naturales *n* y *d*, dividir *n* por *d* es repartir un conjunto de *n* elementos en tantos subconjuntos de *d* elementos como sea posible. El número de subconjuntos formados es el cociente y los elementos que quedan es el resto.

Este proceso se puede ver como una repetición de la sustracción.

Ejemplo: 27-5 = 22; 22-5=18; 18-5=13; ...

Definición aritmética de división entera:

Dados dos números naturales *n* y *d*, $d \neq 0$ y $n \geq d$, dividir *n* por *d* significa encontrar otros dos números naturales *q* y *r* tales que $n = d.q + r$, siendo $r < d$.

Una condición para *q* y *r* equivalente a la anterior es la siguiente:

$q.b \leq a < (q+1).b$; $r = a-q.b$

Si el resto es cero se dice que la división es *exacta*. En este caso la división se puede considerar como la operación inversa de la multiplicación, esto es, "calcular el número que multiplicado por *d* dé como resultado n (repartir un conjunto de n elemento en subconjuntos de *d* elemetos).

La división no es una ley de composición interna en N ya que a dos naturales, el dividendo y el divisor, se le hace corresponder no uno sino dos números naturales: El cociente y el resto. Se considera, sin embargo, como una de las operaciones aritméticas en N.

Una propiedad útil de la división entera:

Si se multiplica el dividendo y el divisor de una división por un mismo número *n*, no se modifica el cociente de la división, pero cambia el resto, que queda también multiplicado por *n*.

Aplicando esta propiedad obtenemos que 61000 dividido por 9000 da como cociente 7 y resto 7000, ya que 61 divido por 9 da como cociente 7 y resto 7, lo que se puede hacer mentalmente.

3. TÉCNICAS DE CÁLCULO DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTERA

3.1. Estrategias de obtención multiplicaciones y divisiones enteras básicas

Ejercicios

11.¿Cuánto es veinticinco por doce? ¿Cómo obtienes la respuesta sin usar papel y lápiz?

12 . Calcula el cociente y el resto de la siguiente división entera 345678 : 23, restando múltiplos del divisor.

El uso de estrategias intermedias para obtener multiplicaciones y divisiones básicas es mucho menos frecuentes que en la suma y resta debido a que la escuela ejerce una fuerte presión para que los niños memoricen la tabla de multiplicar. Las estrategias más frecuentes para obtener alguno resultados de dicha tabla son:

- *Sumar reiteradamente*. Se multiplica sumando el multiplicando tantas veces como indique el multiplicador. Por ejemplo; "ocho por tres es ocho más ocho, dieciseis, más ocho, veinticuatro". También se puede utilizar en la división entera. Por ejemplo, para calcular “doce entre tres” se calcula cuántas veces hay que sumar tres para obtener doce.

- *Restar reiteradamente*. Se obtiene un cociente restando el divisor del dividendo todas las veces que sea posible. Por ejemplo: "veinticuatro dividido por seis, veinticuatro menos seis, dieciocho, menos seis, doce, menos seis, seis; cabe a cuatro" .
- *Repartir*. Consiste en efectuar la división por medio de la escenificación de una técnica de reparto. Por ejemplo: "veinticuatro dividido por seis; tengo que repartir veinticuatro objetos entre seis personas; si le doy dos objetos a cada una sobran doce; si le doy cuatro objetos a cada una no sobra ninguno, pues cuatro".
- *Recitar las tablas*. Se recita toda la tabla hasta llegar al resultado pedido. Por ejemplo, para calcular “seis por cuatro” se dice: “seis por uno, seis, seis por dos, doce, seis por tres, dieciocho, seis por cuatro, veinticuatro" .
- *Permutar términos*. Preguntan "ocho por seis" y pensamos "seis por ocho, cuarenta y ocho".
- *Multiplicar en vez de dividir*. Preguntan "treinta y cinco dividido por siete" y pensamos "siete por cinco, treinta y cinco, cinco".
- *Sumar o restar el multiplicando o multiplicador*. Preguntan "ocho por siete" y pensamos "ocho por seis, cuarenta y ocho, más ocho, cincuenta y seis" o bien "ocho por ocho, sesenta y cuatro, menos ocho, cincuenta y seis" .
- *Calcular el doble o la mitad*. Por ejemplo, "seis por cuatro; seis por dos, doce, por dos, veinticuatro" o "siete por cinco; siete por diez, setenta, la mitad treinta y cinco"
- *Calcular con los dedos*. Por ejemplo, para obtener el producto de 9 por cualquier otra cifra, por ejemplo, 6, se levantan las dos manos y se baja el dedo que hace el número seis del total de diez dedos. Los dedos que quedan a su izquierda representan el número de decenas del producto y los que quedan a su derecha el número de unidades.

Las tres primeras estrategias son propias de gente poco escolarizada. La cuarta se suele dar en los niños que están aprendiendo las tablas de multiplicar y todavía no controlan totalmente el proceso. La quinta y la sexta son muy frecuentes. La séptima y la octava se dan con una cierta frecuencia aunque son más habituales en números más grandes. Las estrategias de cálculo con dedos han desaparecido casi totalmente, pero fueron muy importantes en otras épocas.

3.2. Técnicas orales y de cálculo mental de multiplicación y división entera

El objetivo de las técnicas orales es redondear, obtener números sencillos, y son las siguientes:

- *Intercambio de términos*. Consiste en intercambiar el orden de los factores. Por ejemplo, nos dicen "doce por veinticinco" y pensamos en "veinticinco por doce".
- *Supresión o añadido de ceros*. Se prescinde de los ceros finales de los números y se añaden después de efectuada la operación. Ejemplo: "siete mil por cincuenta; siete por cinco, treinta y cinco; trescientas cincuenta mil"; "mil quinientos dividido por treinta; quince entre tres, cinco; cincuenta" .
- *Distribución.* Se descompone uno de los números en sumandos o sustraendos y se aplica la propiedad distributiva. En el caso de la división sólo se puede descomponer el

dividendo. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro es veinticinco por veinte más veinticinco por cuatro; veinticinco por veinte, quinientos; veinticinco por cuatro, cien; seiscientos"; "veinticinco por veinticuatro es veinticinco por veinticinco menos veinticinco; veinticinco por veinticinco, seiscientos veinticinco; menos veinticinco, seiscientos"; "ciento sesenta y ocho dividido por catorce; ciento sesenta y ocho es ciento cuarenta más veintiocho; ciento cuarenta entre catorce, diez; veintiocho entre catorce, dos; diez y dos, doce" .

- *Factorización.* Consiste en descomponer en factores uno o los dos términos de la operación. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro; veinticuatro es cuatro por seis; veinticinco por cuatro, cien; cien por seis, seiscientos" ; "ciento ochenta dividido por quince; ciento ochenta entre tres, sesenta; sesenta entre cinco, doce" .
- *Compensación*. En el producto se multiplica un término por un número mientras el otro se divide por el mismo número. En la división entera se multiplican o dividen los dos términos por un mismo número. Ejemplos: "veinticinco por veinticuatro es lo mismo que cincuenta por doce; cincuenta por doce es cien por seis, seiscientos" ; "ciento ochenta dividido por quince es lo mismo que sesenta entre cinco, doce" .

La factorización y compensación modifican el resto cuando se utilizan en divisiones que no son exactas y éste tiene que ser reconvertido “a posteriori”. Por ejemplo, ciento ochenta y tres dividido entre quince tiene de resto tres. Sin embargo, si dividimos sesenta y uno entre cinco el resto es uno. Para reconvertir el resto es necesario aplicarle la operación u operaciones inversas de las aplicadas a dividendo o divisor .

3.3. Técnica escrita de multiplicación

Descripción del algoritmo de la multiplicación

Supongamos que queremos multiplicar 346 por 38. Haremos los pasos siguientes:

- Se elige como multiplicando el número mayor. Se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador. Se traza una raya horizontal debajo del multiplicador.

$$\begin{array}{r} 346 \\ \times 38 \\ \hline \end{array}$$

- Si el multiplicando o multiplicador son números acabados en ceros se prescinde de dichos ceros y, al finalizar el algoritmo, al resultado obtenido se le añadirán los ceros de multiplicando y multiplicador juntos.
- Se elige la primera cifra significativa del multiplicador empezando por la derecha y se multiplica por la primera cifra significativa del multiplicando, también empezando por la derecha.

$$\begin{array}{r} 4 \\ 346 \\ \times 38 \\ \hline 8 \end{array}$$

- Si el resultado de ese producto es menor que 10 se escribe debajo de la raya. Si es mayor o igual que 10 se escriben las unidades debajo de la raya y la cifra de las decenas (llevada) se guarda para añadirla a la operación siguiente.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 346 \\ \times 38 \\ \hline 68 \end{array}$$

- Se pasa a multiplicar la misma cifra del multiplicador por la cifra siguiente del multiplicando y sumándole la llevada si existe. La cifra de las unidades del resultado se escribe bajo la raya, a la izquierda de la cifra ya escrita y la cifra de las decenas, si existe, se guarda para incorporarla al producto siguiente.

- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última cifra del multiplicando. El resultado de esta operación se escribe íntegro debajo de la raya.

```
 346
 x38
────
2768
```

- Se toma la cifra de las decenas del multiplicador y se repite el procedimiento anterior escribiendo el resultado debajo del resultado anterior y haciendo que la cifra de las unidades de este segundo resultado quede situada en la misma columna que la cifra de las decenas del primer resultado.

- Se continua el procedimiento hasta que todas las cifras del multiplicador han sido utilizadas. Si alguna de las cifras intermedias del multiplicador es un cero se prescinde de ella y el resultado de multiplicar la cifra siguiente por el multiplicando se escribe debajo del último resultado de manera que la cifra de las unidades del primero coincida en la misma columna con la de las centenas del segundo.

```
  3346
   x38
  ────
  2768
+10038
──────
103148
```

- Se traza una segunda raya horizontal debajo del último producto realizado y se procede a aplicar el algoritmo de la suma a los números situados entre las dos rayas.

- El número que aparece bajo la segunda raya es el producto de los dos números iniciales.

Descripción de la parte oral del algoritmo

Este algoritmo se acompaña de una cantinela oral cuyo objetivo es:

- facilitar la obtención de los hechos numéricos básicos de multiplicación;
- ayudar a retener en memoria la cantidad llevada;
- realizar oralmente la suma de números de dos cifras con números de una cifra.

Justificación del algoritmo

El algoritmo se justifica por la posibilidad de descomponer los números en sus unidades y por las propiedades distributiva del producto respecto a la suma y asociativa y conmutativa de suma y producto.

Por ejemplo, multiplicar 346 x 38 es lo mismo que multiplicar (300 + 40 + 6)(30 + 8) y teniendo en cuenta las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa de sumas y productos, eso es lo mismo que (300 x 8 + 40 x 8 + 6 x 8) + (300 x 30 + 40 x 30 + 6 x 30). Si prescindimos de los ceros, esta expresión refleja el producto de cada una de las cifras del multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador y la suma posterior de los resultados obtenidos, que es precisamente lo que se hace en el algoritmo.

3.4. Técnica escrita de división entera

Las técnicas escritas de suma, resta y multiplicación son algoritmos pero la que corresponde a la división entera no lo es, es un semi-algoritmo pues exige toma de decisiones en determinados momentos. Es un proceso que obliga a realizar tanteos, estimaciones y a rehacer alguna de sus partes si la estimación no resulta correcta.

Otra diferencia de la división entera escrita respecto a los algoritmos de las demás operaciones es que en ella se trabaja de izquierda a derecha mientras que en los otros los números se recorren de derecha a izquierda.

Descripción de la técnica escrita de división entera

- Se escribe el dividendo y a su derecha el divisor encuadrado por una línea vertical y otra horizontal.
- Si tanto dividendo como divisor acaban en cierto número de ceros, se mira cual de los dos acaba en menos ceros y esos ceros se suprimen tanto al dividendo como al divisor. Una vez terminada la división, al resto hay que añadirle tantos ceros como inicialmente se suprimieron al dividendo o al divisor.
- Empezando por la izquierda, se toman en el dividendo tantas cifras como tenga el divisor. Si el número así elegido es menor que el divisor se toma una cifra más.
- Se estima cuántas veces cabe el divisor en el número elegido (para esto se necesita una técnica auxiliar) y la cifra obtenida en la estimación se escribe debajo del divisor y será la primera cifra del cociente.
- Se multiplica dicha cifra por la cifra de las unidades del divisor y el resultado se lleva a la cifra de las unidades del número elegido en el dividendo para efectuar una resta.
- A la cifra de las unidades de este último número se le añaden el número de decenas necesarias para que la resta sea efectuable y el resultado de la resta se escribe debajo en la misma columna.
- Se multiplica de nuevo la primera cifra del cociente por la cifra de las decenas del divisor y al resultado se le suma la cifra de las decenas añadidas para efectuar la resta anterior. El número así obtenido se lleva a la cifra de las decenas del número elegido en el dividendo para proceder a restar. Se reitera el procedimiento hasta terminar de multiplicar la cifra del cociente por todas las cifras del divisor .
- Si, como consecuencia de una estimación errónea, la operación resulta imposible o el número que aparece escrito bajo el dividendo resulta ser mayor o igual que el divisor, debe borrarse la cifra del cociente y el número escrito debajo del dividendo y comenzar de nuevo.
- Una vez acabado este proceso se baja la cifra siguiente del dividendo y se coloca a la derecha del último número escrito bajo el dividendo. Con este nuevo número así obtenido, y en el supuesto de que sea mayor o igual que el divisor, se procede a estimar cuántas veces cabe el divisor en él, se escribe el resultado de la estimación como segunda cifra del cociente y se repite el procedimiento anterior hasta agotar todas las cifras del dividendo.
- Si el número al que hacemos referencia en el apartado anterior es menor que el divisor, se escribe un cero como siguiente cifra del cociente y en el dividendo se baja la cifra siguiente y se comienza de nuevo la estimación. Si no existe cifra siguiente que bajar la división habrá terminado.
- Por último, una vez finalizado el procedimiento, el número que aparece escrito debajo del divisor será el cociente de la división y el último número escrito debajo del dividendo será el resto.

3.5. Técnica auxiliar de estimación

Es una técnica oral que tiene los siguientes pasos:

- Si la parte del dividendo que se esta considerando tiene el mismo número de cifras que el divisor, se tiene en cuenta la primera cifra de ese dividendo (empezando por la izquierda) y la primera del divisor; si tiene una cifra más se consideran las dos primeras cifras del dividendo y la primera del divisor.
- Se calcula oralmente el cociente de dividir la primera o dos primeras cifras del dividendo por la primera cifra del divisor y el resto que quedaría.
- Se multiplica el cociente así obtenido por la segunda cifra del divisor y se compara la llevada que produce esta multiplicación con el resto que tenemos. Si la llevada es mayor que el resto hay que elegir un cociente que tenga una unidad menos. Si la llevada es menor en más de una unidad del resto se mantiene el cociente.
- Si la llevada es igual que el resto o difiere de él en una unidad menos hay que multiplicar el cociente por la tercera cifra del divisor, tener en cuenta la llevada y sumársela al producto del cociente por la segunda cifra del divisor. Se compara de nuevo la llevada así obtenida con el resto. Si la llevada es menor o igual que el resto el cociente se mantiene, si es mayor el cociente se disminuye en una unidad.

Descripción de la parte oral de la técnica

Esta técnica se acompaña de una cantinela oral cuyo objetivo es:

- facilitar la obtención de los hechos numéricos básicos de multiplicación y división;
- restar oralmente números de hasta dos cifras cuya diferencia es menor que una decena, utilizando la estrategia de "sumar en vez de restar";
- modificar directamente el minuendo en función del tamaño del sustraendo ayuda a retener en memoria la llevada;
- realizar oralmente la suma de números de dos cifras con números de una cifra.

Justificación de la técnica

La justificación del algoritmo se basa en la posibilidad de descomponer los dividendos en suma de números divisibles por el divisor y en la existencia de la propiedad fundamental de la división entera $(n = dq + r)$, la distributiva a derecha de la división respecto a la suma y la conmutatividad de producto y cociente $(a.\ b : c = a: c.\ b)$.

Por ejemplo, 3748 : 6 es lo mismo que (3600 + 148) : 6. Esto equivale, por la propiedad distributiva a izquierda de la división respecto a la suma, a 3600 : 6 + 148 : 6. Prosiguiendo con la idea de descomponer el dividendo en números divisibles por el divisor se tiene que 3748 : 6 = 3600 : 6 + 120 : 6 + 24: 6 + 4 : 6 = 600 + 20 + 4 + (4 : 6) = 624 + (4 : 6), lo que nos permite obtener el cociente, 624, y el resto, 4. Y esto es el fundamento de la técnica escrita de división entera.

Ejercicios

13. A continuación se realizan algunas operaciones utilizando técnicas orales. Indica en cada caso las técnicas utilizadas.

c) 2500 x 13, tres por veinticinco, setenta y cinco, mas doscientos cincuenta, trescientos veinticinco, treinta y dos mil quinientos.

d) 156 : 12, setenta y ocho dividido por seis, treinta y nueve dividido por tres, trece.

e) 15 x 24, es lo mismo que treinta por doce, lo mismo que sesenta por seis, treinta y seis, trescientos sesenta.

14. Realiza oralmente las siguientes operaciones, indicando en cada momento la técnica empleada: 524- 38; 127 + 289; 210 x 16; 360 : 24

3.6. Otras técnicas escritas de multiplicación y división entera

a) Algoritmo extendido de multiplicación.

Evita el problema de las llevadas pero resulta muy largo de escribir por lo que se usa poco. Además, resulta difícil decidir en qué columna debe colocarse cada uno de los productos parciales. Veamos el siguiente ejemplo:

			5	4	2	7
				3	7	5
					3	5
				1	0	
			2	0		
		2	5			
				4	9	
			1	4		
		2	8			
	3	5				
			2	1		
			6			
	1	2				
1	5					
2	0	3	5	1	2	5

b) Algoritmo extendido de división

En España se enseña como un algoritmo intermedio para llegar al algoritmo tradicional, pero la elección de un algoritmo de resta en el que las llevadas se le restan al minuendo en vez de sumárselas al sustraendo obliga en muchos países a presentar este algoritmo como un algoritmo terminal de la división.

5	6	4	0	2	1	4 3 5
4	3	5				1 2 9 6
1	2	9	0			
	8	7	0			
	4	2	0	2		
	3	9	1	5		
		2	8	7	1	
		2	6	1	0	
			2	6	1	

c) Multiplicación y división por duplicación

Se trata de una algoritmo histórico usado en muchas culturas; hoy en día ha caído en desuso. Para multiplicar 457 x 86 se escribe en una columna el número 457 y en otra el número 1 y se duplican sucesivamente esos números hasta que en la segunda columna nos acercamos lo más posible a 86. Finalmente se suman los términos de la primera columna que corresponden a términos de la segunda columna cuya suma sea 86.

~~4 5 7~~	1
9 1 4	2
1 8 2 8	4
~~3 6 5 6~~	8
7 3 1 2	16
~~1 4 6 2 4~~	32
2 9 2 4 8	64
3 9 3 0 2	

Para dividir 457: 86 se coloca en una columna el divisor 86 y en otra el número 1. Se duplican sucesivamente los números hasta que en la primera columna nos acercamos lo más posible al dividendo. Después se suman todos los términos de la primera columna cuya suma no sobrepase el dividendo. La suma de los términos correspondientes de la segunda columna nos da el cociente. El resto será 457 -430 = 27.

d) Multiplicación por doble y mitad

Ha sido un algoritmo habitual en sociedades iletradas donde el conocimiento de la tabla de multiplicar se sustituía por técnicas de calcular dobles y mitades.

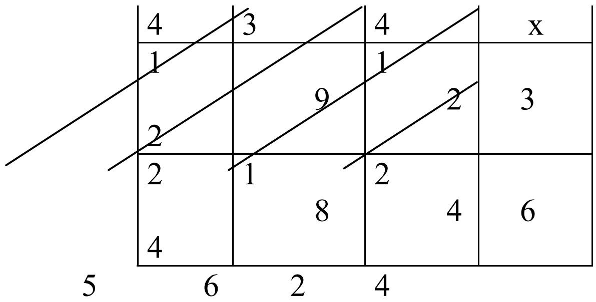
86	1
~~172~~	~~2~~
344	4
430	5

Para multiplicar 457 x 86 se escriben los dos números y mientras el primero se dobla el segundo se divide por dos, prescindiendo de decimales, hasta llegar a la unidad. Al final se suman todos los términos de la primera columna que corresponden a números impares de la segunda columna.

~~4 5 7~~	87
9 1 4	43
1 8 2 8	21
~~3 6 5 6~~	10
7 3 1 2	5
~~1 4 6 2 4~~	2
2 9 2 4 8	1
3 9 3 0 2	

e) Multiplicación en "celosía"

Se trata de un algoritmo de multiplicación usado en Europa hasta el siglo XVI en el que fue sustituido por el actual. Es un buen algoritmo y se supone que las razones de su sustitución fueron de orden tipográfico. El multiplicando se escribe encima de la rejilla y el multiplicador a la derecha. En cada casilla se escribe el resultado de multiplicar las correspondientes cifras de multiplicando y multiplicador. Finalmente se suma en diagonales y el resultado del producto aparece debajo y a la izquierda de la rejilla.



f) División en "galera"

Fue usada hasta el siglo XVII en que se sustituyó por la técnica actual.

Equivale a un algoritmo de división extendido pero la colocación de los números es distinta.

Para dividir 44977 : 382 se seguían los pasos que reproducimos en la figura.

El cociente es 117 y el resto 283.

67
382 | ~~449~~77 | 1
382

29
~~67~~5
382 | ~~449~~77 | 11
~~3822~~
~~38~~

2
~~29~~8
~~675~~3
382 | ~~44977~~ | 117
~~38224~~
~~387~~
~~26~~

Ejercicios

15. Construye la tabla de multiplicar números naturales en base 6. Calcula el producto de los siguientes números que están expresados en base 6, haciendo los cálculos en base 6: $34521_{(6}$ x $123_{(6}$. Justifica con este ejemplo el algoritmo tradicional (disposición en colunmas de los resultados parciales) indicando las propiedades del sistema de numeración posicional y de las operaciones aritméticas requeridas.

16. Realiza la multiplicación y la división entera de 227 por 41 utilizando el algoritmo de duplicación.

71. Utiliza el algoritmo de resta sin llevadas para restar 17829 de 34234 y el algoritmo de multiplicación en celosía para multiplicar 258 por 3489.

3.7. Diferencias entre las técnicas orales y escritas

- Las técnicas orales se organizan en torno a nuestro sistema de numeración oral. En cambio, las técnicas escritas se basan en nuestro sistema de numeración escrito.
- Las técnicas escritas, salvo la de la división, son algorítmicas, mientras que las técnicas orales exigen una toma de decisiones que permita encontrar números "redondos" intermedios.
- Las técnicas orales manejan los números globalmente frente a las técnicas escritas que son analíticas, es decir, manejan los números descompuestos en dígitos.
- En las técnicas orales los números se trabajan de izquierda a derecha y en las escritas de derecha a izquierda, salvo en la división.
- No son técnicas independientes. Los algoritmos escritos necesitan un apoyo oral y con frecuencia las técnicas orales van acompañadas de un refuerzo escrito que permita mantener los números en la memoria.

3.8. Operaciones con calculadora

Actualmente, existe la posibilidad de realizar las operaciones con calculadora. Para ello necesitamos apretar las secuencias de teclas apropiadas para cada operación. Para obtener la suma, resta o multiplicación de los números 3489 y 276 se aprietan las teclas siguientes[2]:

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{x}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

Una vez apretadas las teclas correspondientes el resultado de la operación aparece en la pantalla.

Resulta un poco más complicado el caso de la división entera. En las calculadoras ordinarias al apretar la secuencia de teclas siguiente:

$$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{:}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{=}$$

no se obtiene el cociente y resto correspondientes a la división entera, sino el cociente correspondiente a la división decimal.

Es decir, aparece en pantalla el número decimal 12.641304 (en las calculadoras el punto equivale a nuestra coma decimal).

Esto nos permite saber que el cociente de la división entera es 12. Para reconstruir el resto a partir de ese resultado, se le resta el cociente entero 12 al número que está en pantalla, se obtendrá 0.6413043; se multiplica ese resultado por el divisor 276 y el número natural 177

[2] Esta secuencia no sirve para las Hewlett-Packard que usan el sistema de notación polaco.

que aparece en pantalla será el resto de la división entera. Si el número que aparece es un decimal se redondea al entero más próximo.

Ejercicios:

18. Usando la función constante de la calculadora calcula el valor de
    9x9x9x9x9x9x9x9, o sea, 9^8
19. El producto de dos números consecutivos es 2070. ¿Qué números son?
20. Si la tecla de multiplicar está estropeada indica cómo se puede calcular el producto,
    1234 x 596
21. Calcula el valor exacto de la siguiente multiplicación:
    9765432156 x 132547965
22. Utiliza la memoria de la calculadora [M+] para calcular la expresión:
    (7984739 + 947326) : (3 x 5287710 - 603683)

23. Comprueba con la calculadora los siguientes patrones y complétalos hasta que puedas decir algo sobre su campo de validez.

$1 . 8 + 1 = 9$	$9 . 9 + 7 = 88$	
$12 . 8 + 2 = 98$	$98 . 9 + 6 = 888$	$65^2 - 56^2 = 33^2$
$123 . 8 + 3 = 987$	$986 . 9 + 5 = 8888$	$6565^2 – 5656^2 = 3333^2$
$1234 . 8 + 4 = 9876$	$9876 . 9 + 4 = 88888$	$656565^2 – 565656^2 = 333333^2$

3.9. Potencias, raíces y logaritmos

Además de las operaciones anteriormente citadas, se construye también en el conjunto de los números naturales una nueva operación, la potencia, para indicar productos repetidos. La consideración de esta operación no nos ahorra cálculos, ya que el cálculo de una potencia exige efectuar los productos repetidos, pero sí que permite escribir de forma abreviada dichos productos repetidos.

- Así, en vez de escribir 3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 x3 escribimos 3^{10} y esto quiere decir que tenemos que multiplicar el número 3 por sí mismo 10 veces. En una potencia c = a^b se dice que a es la base y *b* el exponente.
- En la igualdad $5^3 = 125$ decimos que 125 es el cubo de 5 pero también podemos decir que 5 es la raíz cúbica de 125 y que 3 es el logaritmo en base 5 de 125.
- En general, si c = a^b entonces $a = \sqrt[b]{c}$ y b = $\log_a$c. El logaritmo y la raíz pueden considerarse como operaciones inversas de la potencia que nos permiten encontrar un exponente conocida una potencia y su base o encontrar la base conocida la potencia y el exponente.

Ejercicios

24. Antes de que se hicieran habituales las calculadoras, había muchas reglas para aligerar los cálculos. Una de ellas servía para calcular el cuadrado de un número terminado en 5. El resultado es un número terminado en 25, delante del cual se ponía el resultado de multiplicar el número que precede a 5 por ese mismo número aumentado en una unidad. Por ejemplo, 35^2 = (3.4)25 = 1225, 75^2 = (7. 8)25 = 5625. ¿Cuál es la justificación de esta regla?

25. Justifica si es cierta o falsa la siguiente regla: "Piénsese en dos números naturales consecutivos. Multiplíquense. El resultado multiplíquese por 4. Al resultado súmesele 1. Extráigase la raíz cuadrada del resultado. El número que resulta es la suma de los dos que se pensaron inicialmente.

26. Halla un cuadrado perfecto de la forma *AABB*.

4. MODELIZACIÓN ARITMÉTICA DE SITUACIONES FÍSICAS O SOCIALES

Como ya hemos visto, las operaciones aritméticas son útiles conceptuales que el hombre inventó para resolver ciertas situaciones físicas o sociales problemáticas. Pero, aunque al principio, dichas operaciones estaban directamente ligadas a determinadas acciones físicas, poco a poco, se abstrayeron y se pasó a considerarlas un dispositivo que asocia a dos números dados un tercer número siguiendo determinadas reglas.

Además, el número creciente de aplicaciones diferentes de las operaciones aritméticas hace que ya no se asocien a un problema particular. Se produce, por tanto, una disociación entre las operaciones y las situaciones que les dieron origen, convirtiéndose en un conocimiento separado de los problemas que resuelve. De modo paralelo, se desarrolló el concepto abstracto de número entendido como un elemento de un conjunto en el que están definidas unas operaciones que cumplen determinadas propiedades y desligado de las técnicas sociales de recuento y medida.

Este proceso de progresiva abstracción del número y las operaciones aritméticas es la base del desarrollo matemático occidental. Por otro lado, lo matemático se separa de lo matematizado. El conocimiento de las operaciones aritméticas, de sus propiedades y de las técnicas orales y escritas de cálculo nos proporciona una herramienta muy poderosa pero nos exige saber cuándo y dónde utilizarla. Aparece así una nueva problemática: la necesidad de relacionar las acciones, situaciones y datos con las operaciones aritméticas; es necesario decidir, por ejemplo, si el problema es "de sumar o de restar". La traducción de las acciones y datos de la situación a números y operaciones recibe el nombre de modelización aritmética de la situación.

En la escuela, las situaciones y problemas planteados no son situaciones "vividas" sino situaciones "narradas", que se presentan a través de un texto escrito o de una narración oral, son los problemas aritméticos escolares[3]. Esto añade una nueva dificultad: la relación entre acción y verbo ya que un mismo verbo puede describir varias acciones y una misma acción se puede nombrar mediante varios verbos distintos.

Problemas aritméticos de varias etapas

La estructura de los problemas que se modelizan por medio de varias operaciones combinadas es muy compleja y no admite clasificaciones simples como las que existen para las situaciones que se resuelven con una sola operación.

En los problemas de varias etapas hay que tomar decisiones respecto a qué operaciones hay que realizar , entre qué datos y en qué orden, es decir, hay que encontrar un camino que una los datos del problema, lo que se da, con las incógnitas del problema, lo que se pide. Cuando el camino se recorre desde las incógnitas hacia los datos se le llama "análisis" y cuando se recorre desde los datos hacia las incógnitas se le llama "síntesis" .

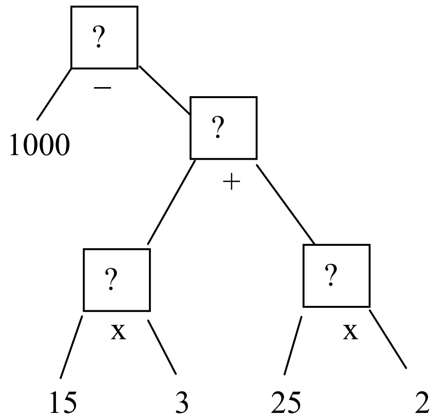
En general, el método de resolución de los problemas aritméticos es un método mixto de "análisis-síntesis": se parte de las incógnitas estableciendo las relaciones que existen entre ellas y los datos y definiendo, si es preciso, incógnitas intermedias, lo que proporciona el plan de solución del problema y después se ejecuta dicho plan desde los datos hasta las incógnitas, lo que proporciona la solución del mismo. Se puede construir un diagrama de estructura del problema que ponga de manifiesto qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué

[3] Resolver un problema aritmético significa traducirlo en términos de números y operaciones a efectuar entre ellos, es decir, modelizar aritméticamente la situación a que hace referencia el texto, y ejecutar, finalmente las operaciones para obtener un resultado.

orden y el recorrido del diagrama en uno u otro sentido nos mostrará la doble vía del análisis-síntesis.

Ejemplo: Juan y María son hermanos. Juan compra 3 lápices a 15 ptas cada uno y María 2 cuadernos a 25 ptas cada uno. Pagan con 1000 ptas. ¿Cuánto les devuelven?

El diagrama de estructura de este problemq, que nos muestra el camino que hay que recorrer para llegar de la incógnita a los datos o viceversa será el siguiente:



Ejercicios

27. Unos granjeros almacenaron heno para 57 días, pero como el heno era de mejor calidad de lo que pensaban, ahorraron 112 kg. por día, con lo que tuvieron heno para 73 días. ¿Cuántos kilos de heno almacenaron?
28. En un taller de confección disponen de 4 piezas de tela de 50 m cada una. Con ellas se van a confeccionar 20 trajes que necesitan 3 m de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse ?
29. Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores. ¿Cuántos kilómetros recorrió el aeroplano en total?
30. Un comerciante compró 23 resmas de papel a 5500 ptas cada una y las vendió, convertidas en cuartillas, a 830 ptas el millar. Sabiendo que el comerciante ganó 26220 ptas en la venta de todo el papel comprado y que una resma tiene 500 pliegos ¿cuántas cuartillas salen de cada pliego?
31. Un automóvil parte de un punto *A* con velocidad uniforme de 40 km/h hacia otro punto *E*. Dos horas después sale de *A* hacia *E* otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h. ¿A qué distancia de *A* se encontrarán los dos automóviles?

5. LA ESTIMACIÓN EN EL CÁLCULO ARITMÉTICO

Estimar el resultado de una operación o el de una medida de una cantidad es hacer una valoración aproximada del mismo. Por ejemplo, para estimar el resultado de 23x19, realizamos el producto 20x20=400. Algunas características de la estimación en el cálculo son las siguientes:

- La valoración se realiza, por lo general, de forma mental.
- Se hace con rapidez y empleando números sencillos.
- El valor obtenido no tiene que ser exacto, pero sí adecuado para tomar decisiones.
- El resultado admite soluciones diferentes dependiendo de la persona que lo realiza.

La estimación del resultado de los cálculos aritméticos es de utilidad en casos como los siguientes:

- Cuando no es posible conocer las cantidades implicadas en una operación de manera exacta. Por ejemplo, si queremos determinar la superficie de una pared y no podemos medir su altura; al elaborar un presupueto para un viaje; etc.
- Cuando un cálculo es difícil y nos interesa sólo una aproximación del resultado. Ejemplo: Si queremos saber el precio de una prenda de vestir cuyo precio está rebajado en un 15 por ciento.
- Cuando queremos comprobar si una operación realizada de forma exacta no tiene un gran error; por ejemplo, al revisar la cuenta de una compra, o la solución de un problema.
- Cuando se necesita expresar una información numérica de manera más clara; por ejemplo, el coche vale dos millones y medios de pesetas, en lugar de 2.495.000.

Por último, la estimación es útil ya que su práctica implica un dominio del sistema de numeración, de las relaciones numéricas y de las operaciones aritméticas, completando el dominio automatizado de los algoritmos de cálculo escrito.

Procesos de estimación en cálculo

Los procesos de estimación en cálculo consisten en modificar los datos de una operación para hacerla más sencilla. Esta modificación se lleva a cabo mediante las técnicas de redondeo, truncamiento o sustitución.

a) *Redondeo.* Redondear consiste en suprimir cifras de la derecha de un número y sustituirlas por ceros con el siguiente criterio: Si la cifra que se suprime es mayor o igual a 5 la que va a continuación se aumenta en una unidad; en otro caso se deja igual.

Ejemplos:
- 2346, redondeado a decenas sería 2350, y redondeado a las centenas sería 2300.
- la operación, 1281 + 3436 + 2794, redondeada a los millares sería
- 1000 + 3000 + 3000, y redondeada a las centenas sería: 1300 + 3400 + 2800. En el primer caso el error es inferior a 1500, y en el segundo es inferiror a 150.

Ejercicios

36. Valorar el error que se comete en la resta 27478 - 19824 dependiendo del tipo de redondeo que se realice.

37. Estimar los resultados de las siguientes operaciones:
1249 + 3684 + 6936 + 2368; 6248 - 1794
489 + 654 + 160 + 346 + 127; 149 x 151
1342 x 104; 997 x 364; 17484 x 1016; 104697:50

b) *Trucamiento*. Truncar consiste en suprimir dígitos de un número, a partir de un determinado orden de uniddes, y sustituirlos por ceros. Ejemplo: 2400 es un truncamiento de 2469.

Ejercicio

38. Resolver los ejercicios anteriores mediante truncamiento y comparar los resultados.

c) Sustitución. Este proceso consiste en sustituir los datos por otros próximos a ellos pero "compatibles" en el sentido de que la operación resulte sencilla. Ejemplo: 368:7 ≈ 350:7; 29 x 32 ≈ 30 x 30.

6. DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

6.1. Definición de divisor y múltiplo. Notaciones y propiedades

Ejercicio

39. Imagínate una tabla de multiplicar que, en vez de tener diez filas y diez columnas, tuviera infinitas filas e infinitas columnas. ¿Cuántas veces aparecería en los resultados de la tabla el número 360?

Primera definición de divisor:

Dados dos números naturales a y b decimos que a es un divisor de b si existe un número natural n que multiplicado por a es igual a b, $na = b$.

Segunda definición de divisor:

Dados dos números naturales $a \neq 0$ y b decimos que a es un divisor de b si al efectuar la división entera de b por a se obtiene resto cero.

Estas dos definiciones son equivalentes en el caso de ser $a \neq 0$. En efecto, si se cumple la primera, al dividir b entre a obtendremos cociente n y resto cero. Por otra parte, si se cumple la segunda, b tendrá que ser igual al divisor a por el cociente q y ya hemos encontrado un número natural que multiplicado por a da b.

Definición de múltiplo:

Se dice que a es múltiplo de b si existe un número natural n que multiplicado por b es igual a a, $a = nb$.

Las siguientes expresiones son equivalentes: a es un divisor de b, b es un múltiplo de a, a divide a b, b es divisible por a. Para indicar que a es divisor de b se utiliza la notación $a \mid b$ y para indicar que b es un múltiplo de a, $b = \dot{a}$

Notaciones algebraicas

Indicaremos los números naturales con letras cualesquiera: a, b, c, n, m, etc.

Si dividimos los números naturales por dos obtenemos una partición en dos subconjuntos: el conjunto formado por los números que son divisibles por dos, los números pares, y el conjunto formado por los números que dan resto uno, los números impares. Indicaremos un número par cualquiera con las expresiones: $2a$, $2n$, etc. y un número impar con: $2a + 1$, $2n - 1$, $2m + 3$, etc.

Si dividimos los números naturales por tres obtenemos tres subconjuntos: los números divisibles por tres, los que tienen resto uno y los que tienen resto dos. Los denotaremos por: $3n$, $3p$, ..., $3n + 1$, 3m -2, ..., $3n + 2$, $3a + 5$, ..., respectivamente.

De modo análogo se denotan los números que se obtienen al dividir por cuatro, cinco, etc.

Propiedades de la divisibilidad

La relación de divisibilidad tiene las siguientes propiedades:

a) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su suma.
b) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su diferencia.
c) Si un número es divisor de otro entonces es divisor de cualquiera de sus múltiplos.
d) Si un número es divisor de otro y multiplicamos los dos números por una misma cantidad la relación de divisibilidad se sigue conservando.
e) Si un número es divisor de otros dos entonces es divisor de su producto.
f) Si un número es divisor de otro entonces es divisor de cualquiera de sus potencias de exponente natural mayor o igual que uno.
g) La unidad es divisor de todos los números naturales.
h) Todo número natural es divisor de sí mismo.
i) Todo número natural es divisor de cero.
j) Cero sólo es divisor de si mismo.

Ejercicios

39. Escribe todos los divisores de los números: 1800, 5491 y 2187.

40. El número 12 tiene seis divisores: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Cuatro de ellos son pares y tres son impares.
   a) Describe la sucesión de números cuyos divisores sean todos, excepto el 1, pares.
   b) Describe la sucesión de números que tengan exactamente la mitad de sus divisores pares.

41. ¿Cuál es el menor número natural que al emplearlo como divisor de 68130 y 107275 origina los restos 27 y 49 respectivamente?

6.2. Criterios de divisibilidad

En general, para saber si un número es divisible por otro se efectúa la división entera y se comprueba si el resto es cero, pero, en algunos casos, existen reglas que permiten averiguar si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división. A estas reglas se les llama criterios de divisibilidad. Vamos a enunciar y justificar algunas de ellas. En lo que sigue suponemos que n es un número natural.

a) *Divisibilidad por 2, 5 o 10*

Si descomponemos el número n en decenas y unidades, $n = 10b + a$, se observa que el término $10b$ es siempre divisible por 2, 5 y 10. Por tanto, la divisibilidad de n por esos números depende de la de la cifra de las unidades, a, y, en general, podemos decir que:

un número es divisible por 2, 5 o 10 si, y sólo si, la cifra de las unidades es divisible por 2, 5 o 10, respectivamente. O también, un número es divisible por 2 si la cifra de las unidades es par, es divisible por 5 si la cifra de las unidades es 0 o 5 y es divisible por 10 si la cifra de las unidades es 0.

b) *Divisibilidad por 4, 20, 25, 50 o 100*

Si descomponemos el número n, supuesto de tres o más cifras, en centenas por un lado y decenas y unidades por el otro, $n = 100c + \underline{ba}$, se observa que el término $100c$ es siempre divisible por 4, 20, 25, 50 y 100. Por tanto, la divisibilidad de n respecto a esos números depende de la divisibilidad de $\underline{ba}$ que representa las decenas y unidades de n. Podemos decir entonces que:

un número es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100 si, y sólo si, el número formado por la cifra de las decenas y la de las unidades es divisible por 4, 20, 25, 50 o 100, respectivamente.

c) *Divisibilidad por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000*

Si descomponemos el número n, supuesto de cuatro o más cifras, en millares por un lado y centenas, decenas y unidades por el otro, $n = 1000d + \underline{cba}$, se observa que el término $1000d$ es siempre divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 y 1000. Por tanto, la divisibilidad de n respecto a esos números depende de la divisibilidad de $\underline{cba}$ que representa las centenas, decenas y unidades de n. Podemos decir entonces que:

un número es divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000 si, y sólo si, el número formado por las centenas, decenas y unidades es divisible por 8, 40, 125, 200, 250, 500 o 1000, respectivamente.

d) *Divisibilidad por 3 o 9*

Si descomponemos en todas sus cifras un número n de, por ejemplo, 4 cifras, obtenemos $n = 1000d + 100c + 10b + a = 999d + d + 99c + c + 9b + b + a = (999d + 99c + 9b) + (d + c + b + a) = 9(111d + 11c + b) + (d + c + b + a)$. Como el primer paréntesis va multiplicado por 9, ese término será siempre divisible por 3 y por 9 y, por tanto, la divisibilidad de n respecto a 3 o 9 depende de la divisibilidad de $d + c + b + a$. Esta demostración es generalizable a números con un número cualquiera de cifras. Por tanto, podremos decir que:

un número es divisible por 3 o 9 si, y sólo si, la suma de sus cifras es divisible por 3 o 9, respectivamente.

e) *Divisibilidad por 11*

Un número es divisible por 11 si, y sólo si, sumando, por un lado, las cifras que ocupan lugar par y, por otro, las que ocupan lugar impar y restando el menor de los números obtenidos al mayor se obtiene un múltiplo de 11.

Ejercicios

42. Algunos pares de números tienen la propiedad de que la suma de los divisores de cada uno de ellos, excluyendo los propios números, es el otro número. A estos números se les llama *números amigos*. Comprueba que los números 1184 y 1210 son amigos.

43. Determina las cifras x e y para que el número

a) $2xy31$ sea divisible por 9.

b) *123xy* sea divisible por 35
c) *28x75y* sea divisible por 33.
d) *2x45y* sea divisible por 72.

44. Encuentra el mayor número natural que al emplearlo como divisor de 247, 367 y 427 origina en todos los casos resto 7.

45. Halla el menor número de 4 cifras que dividido por 4, 7 y 11 da de resto 3.

46. Halla el menor número natural que dividido por 11 tiene resto 6, dividido por 17 tiene resto 12 y dividido por 29 da 24 de resto.

6.3. Números primos y compuestos

Cualquier número *a* se puede dividir por 1 y *a*, que se llaman *divisores impropios* de *a*. A los demás divisores que pudiera tener *a* se les llama *divisores propios*.

Un número *primo* es un número natural distinto de 0 y de 1 que no tiene divisores propios. Un número *compuesto* es un número natural distinto de 0 y de 1 que tiene divisores propios.

Hacemos notar que 0 y 1 no se consideran números primos ni compuestos.

Teorema: Todo número compuesto se puede descomponer en un producto finito de factores primos y esta descomposición es única.

6.4. Técnicas para descomponer un número compuesto en factores primos

Primera técnica: Se descompone el número en producto de otros varios. Si estos son primos el proceso se detiene. Si alguno de ellos es compuesto se vuelve a descomponer en factores hasta que todos los factores obtenidos son primos. Esta técnica se emplea cuando las descomposiciones son fáciles de obtener. Por ejemplo:

$$18000=18.10.10.10.=2.3.3.2.5.2.5.2.5=2^4 3^2 5^3$$

Las sucesivas factorizaciones pueden también expresarse mediante un diagrama en árbol.

Segunda técnica: Es una técnica algorítmica. Consiste en recorrer la sucesión de los números primos comprobando si son divisores o no del número que queremos descomponer. Cuando se encuentra un número primo que es divisor se efectúa la división y se continua el proceso con el cociente. Se sigue así hasta que se obtiene un cociente 1 momento en el que el proceso queda concluido. Por ejemplo, si queremos descomponer en factores el número 173.512 se emplea el dispositivo gráfico siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 173512 & 2 \\ 86756 & 2 \\ 43378 & 2 \\ 21689 & 23 \\ 943 & 23 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

y la descomposición factorial de 173.512 será 2^3x23^2x41.

6.5 Técnica para obtener la sucesión de números primos menores que uno dado

Esta técnica se conoce con el nombre de "criba de Eratóstenes". Para encontrar los números primos menores que un cierto *n* se escriben todos los números naturales hasta *n.* Se tacha el 1 porque no es un número primo. El primer número que queda sin tachar es el 2 que sí que es primo. Se recuadra y se tacha su cuadrado, 4, y, a partir de él, se cuentan los números de dos en dos y los que ocupan el segundo lugar se tachan. Una vez finalizado el recuento de dos en dos se toma el primer número que queda sin tachar a partir del 2: será e1 3. Se recuadra, se tacha su cuadrado, 9 y, a partir de él, se cuentan los números de tres en tres y cada tercer número se tacha. A continuación se toma el primer número que queda sin tachar a partir del 3 que será el 5. Se tacha su cuadrado, 25, y contando de cinco en cinco se tachan los números que ocupan el quinto lugar. Se prosigue este proceso hasta llegar a un número primo cuyo cuadrado sea mayor que *n* momento en el que el proceso habrá terminado. Los números recuadrados formarán la sucesión de números primos menores o iguales que *n.* Un ejemplo con los números hasta el 100 se muestra debajo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

6.6. Técnica para comprobar si un número es primo

Para comprobar si un número es primo se divide por cada uno de los elementos de la sucesión de números primos, siguiendo el orden de menor a mayor, y constatando que en todos los casos se obtiene resto distinto de cero. El proceso se para en el momento en que al efectuar una de dichas divisiones se obtenga un cociente que sea menor que el divisor. A partir de ahí no hace falta seguir dividiendo y ya podemos decir que el número es primo.

- Si en una división se obtiene resto 0, el dividendo es divisible, no sólo por el divisor de la división, sino también por el cociente de la misma, por tanto es un número compuesto.
- En el momento en que el cociente es más pequeño que el divisor, ninguna división puede dar resto 0, pues si lo diera el cociente sería un divisor del número y eso ya se habría constatado en las anteriores divisiones efectuadas con números primos más pequeños. El número es primo.

Ejercicios

47. Halla la descomposición en factores primos de los números: 18000000, 60434 y 773.

48. Sólo hay un número con un único divisor: el 1. Los números primos tienen sólo dos divisores. ¿Cómo será la descomposición en factores primos de los números que tienen exactamente tres

divisores? ¿y de los que tienen cuatro, cinco o seis divisores, respectivamente? ¿Tienen alguna característica común los números que tienen un número impar de divisores?

6.7. Técnica para obtener los divisores y múltiplos de un número

Técnica para obtener los divisores de un número

a) Números con un sólo factor primo: Si la descomposición factorial del número es de la forma $p_1^{\alpha 1}$ sus divisores serán 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$. En total $\alpha_1 + 1$.

b) Números con dos factores primos: Si la descomposición factorial del número es de la forma $p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2}$ sus divisores se obtienen multiplicando cada una de las potencias de p: 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$ por cada una de las potencias de p_2: 1, p_2, p_2^2, p_2^3, ..., $p_2^{\alpha 2}$. La mejor forma de hacerlo es construir una tabla multiplicativa de doble entrada:

	1	p_1	p_1^2	p_1^3	….	$p_1^{\alpha 1}$
1						
p_2						
p_2^2						
p_2^3						
. ..						
$p_2^{\alpha 2}$						

El número total de divisores es $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)$.

c) En el caso general, $n = p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} p_3^{\alpha 3} \ldots p_m^{\alpha m}$ los divisores se obtienen multiplicando cada una de las potencias de p_1: 1, p_1, p_1^2, p_1^3, ..., $p_1^{\alpha 1}$ por cada una de las potencias de p_2: 1, p_2, p_2^2, p_2^3, ..., $p_2^{\alpha 2}$; cada uno de esos productos se multiplica por cada una de las potencias de p_3: 1, p_3, p_3^2, p_3^3, ..., $p_3^{\alpha 1}$; los nuevos resultados se vuelven a multiplicar por las sucesivas potencias del siguiente factor primo hasta que se multiplica por las sucesivas potencias de p_m.

En la práctica, con los dos primeros factores primos se construye una tabla multiplicativa de doble entrada; los resultados de esa tabla se llevan a una nueva tabla en la que figuran las potencias del tercer factor primo y así, se van construyendo tablas sucesivas hasta hacer intervenir al último factor primo. El número total de divisores será $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

Técnica para obtener múltiplos de un número

Para obtener los múltiplos de un número natural *a* se multiplica sucesivamente el número *a* por cada uno de los números naturales: 0, 1, 2, 3, etc. Un número tiene infinitos múltiplos.

6.8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números

Decimos que *k* es un *divisor común* de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si divide a todos ellos. Al mayor de los divisores comunes a dichos números se le llama *máximo común divisor* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se denota por $mcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Decimos que k es un *múltiplo común* de los números $a_l, a_2, .., a_n$ si k es un múltiplo de todos ellos. Si tenemos en cuenta sólo los múltiplos comunes distintos de cero, al menor de los múltiplos comunes a dichos números se le llama mínimo común múltiplo de $a_1, a_2, .., a_n$. Se denota por *mcm* $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Dos números a y b se dice que son *primos entre si* si no tienen divisores comunes, esto es, si $mcd(a, b) = 1$.

Técnica de obtención del mcd y mcm de varios números

Para calcular el $mcd(a_1, a_2, ..., a_n)$ se descomponen los números en factores primos. Entonces, el *mcd* será el resultado de multiplicar todos los divisores primos comunes a a_1, a_2 , ..., a_n, elevados al exponente menor con el que figuren en alguno de los a_i.

Para calcular el $mcm(a_1, a_2, ..., a_n)$ se descomponen los números en factores primos. Entonces, el *mcm* será el resultado de multiplicar todos los divisores primos de los números dados, tanto los comunes a todos los números como los que no lo son, elevados al exponente mayor con el que figuren en alguno de los a_i.

Ejercicios

49. Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. de
a) 3023 y 509 b) 126 y 2500 c) 1789 y 667297

50. Halla dos números naturales sabiendo que su m.c.d. es 14 y su m.c.m. 2310.

51. Halla dos números naturales sabiendo que su producto es 5850 *y* su m.c.d. es 15.

52. Halla dos números naturales cuyo m.c.d. es 65, su m.c.m. es 9100 y un número intermedio entre ambos es 270. .

53. Halla dos números naturales que sean proporcionales a 3 y 5 y tales que el producto de su m.c.d. por su m.c.m. sea 15360.

54. Halla dos números naturales cuya suma es 176 y su m.c.d. es 11.

55. Halla dos números naturales primos entre sí tales que su suma sea un número primo que dividido por 7 dé un cociente cuya parte entera sea 3. Sabemos además que el m.c.m. de los números buscados es 90.

56. En el contorno de un campo trapezoidal cuyos lados miden 72, 96, 120 y 132 m., respectivamente, se han plantado árboles igualmente espaciados. Calcula el número de árboles plantados, sabiendo que hay uno en cada vértice y que la distancia entre dos consecutivos es la máxima posible.

57. Dos cuerpos de ejército tienen 12028 y 12772 hombres, respectivamente. ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener un regimiento si cada cuerpo de ejercito tienen que ser dividido en regimientos de igual tamaño?

58. Un faro emite señales diferentes: la primera cada 16s, la segunda cada 45s y la tercera cada 2m 30s. Estas señales se emiten simultáneamente en un cierto instante. ¿Qué intervalo de tiempo pasará hasta que se vuelvan a emitir simultáneamente?

7. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Investigación de propiedades aritméticas:
   a) ¿Son iguales las expresiones: (34+27)x5 y 34 + (27 x 5)? ¿En qué se diferencian?
   b) Compara $2^{12} + 2^{12}$ y 2^{24}. ¿Cuál es mayor?

2. Buscar dos números cuyo producto esté entre 1500 y 1600; otros dos cuyo producto esté entre 150 y 160.

3. Comprobación de estimaciones en cálculos:
   a) Estima cuáles de las siguientes divisiones tienen un cociente entre 20 y 50. Utiliza la calculadora para comprobar las respuestas:
   426: 13;   43368: 131;   4368: 13;   436: 131
   b) En las dos siguientes operaciones indicadas estima el valor desconocido. Comprueba la aproximación de la estimación con la calculadora
   43 x ____ = 2408;   12 x _____ = 672.

4. En las operaciones que vienen a continuación falta alguna cifra que está sustituida por guiones. Complétalas.

```
     - - 5        - - - 7 -      | 3 2 5
   x   1 - -      - - -           -------
   ---------     ----------        1 - -
     2 - - 5      - - - -
   1 3 - 0        - 9 - -
   - - -         ----------
   ---------         - 7 -
   4 - 7 7 -         - - -
                 ----------
                     0 0 0
```

5. Existen parejas de números tales que su producto es igual al de sus imágenes en un espejo. Por ejemplo, 23.64 = 46.32. Encuentra otras parejas de números que tengan esta propiedad. Trata de encontrar una regla que te permita obtener todas las parejas.

6. Elige un número cualquiera. Si inviertes el orden de sus cifras y restas el menor del mayor, observarás que se obtiene un número que es múltiplo de 9. Demuestra esta propiedad para números de 2, 3 y 4 cifras.

7. Resuelve los siguientes problemas de productos y cocientes. Indica, en cada caso, los valores de las variables que intervienen en la situación y el tipo de situación. Cuando intervengan varias operaciones en un mismo enunciado estúdialas por separado.

   a) Un carro transportó 81 sacos de patatas. En cada viaje llevaba 9 sacos. ¿Cuántos viajes hizo?
   b) Un comerciante compró 20 cajas de 12 bolígrafos cada una a 40 ptas. unidad. Otro compró 12 cajas de 40 bolígrafos cada una a 20 ptas. unidad. ¿Cuánto gastó cada comerciante ?

c) De mi casa al colegio hay 760 m.¿Cuántos cm ando si voy y vuelvo del colegio?

d) En el cumpleaños de Laura se iban a repartir 108 globos entre 12 niños. ¿Cuántos tocaban a cada uno? Si explotaron la tercera parte, averigua, sin dividir, los globos que recibió cada niño.

e) Se han llenado 5432 sacos de trigo. Cada uno pesa 92 kg. y sobran 20 kg. ¿Cuánto trigo había para llenar los sacos?

f) Cuatro hermanos decidieron repartirse sus ahorros. A cada uno le correspondieron 658 pesetas. ¿Cuánto dinero habían ahorrado entre los cuatro?

g) ¿Cuántos metros mediría un monte que tuviese cuatro veces la altura del Aneto?

8. Resuelve los problemas que se enuncian a continuación utilizando métodos aritméticos.

a) Se quieren repartir 1200 ptas. entre tres personas, de manera que una tenga la mitad de la otra, y la tercera persona tenga igual que las otras dos juntas. Calcula lo que corresponde a cada una.

b) Un demandadero tiene que ir 2 veces al mes a un pueblo situado a 25 km del punto donde reside. Al principio hacía los viajes en coche, costándole 15 ptas el recorrido de 25 km, pero después compró una bicicleta en 1830 ptas, dedicándola exclusivamente al citado servicio. Teniendo en cuenta que los neumáticos tienen que ser renovados cada 6000 km, siendo el precio de cada neumático 125 ptas, y que los demás gastos de conservación de la bicicleta vienen a ser de 60 ptas al año, calcular los años que habrán transcurrido para economizar el importe de la bicicleta

c) Pablo vendió 160 bocadillos a 200 ptas. cada uno. Cada bocadillo estaba compuesto de 75 gr. de jamón, 2 rebanadas de pan y mostaza. Pablo pagó 1000 ptas. por cada kilo de jamón, 60 ptas. por cada barra de pan (de 20 rebanadas) y utilizó 8 botes de mostaza a 50 ptas. cada uno. ¿Cuánta fue su ganancia?

d) Una costurera, cosiendo a mano, ganaba 50 ptas por día de trabajo. Compró una maquina de coser a crédito en 4800 ptas y el beneficio que con ella obtuvo lo dedicó a pagar su importe, consiguiéndolo en 32 semanas. Se desea saber lo que ganó la modista por día de trabajo, cosiendo a maquina, teniendo presente que no trabajó los domingos.

9. Representa de manera genérica:
a) un múltiplo de 5.
b) un número que al dividirlo por 8 dé resto 3.
c) los números anterior y posterior a un múltiplo de 4.
d) un número que no es múltiplo de 5

10. Demuestra que:
a) la suma de dos números impares es un número par.
b) la suma de tres números pares consecutivos es un múltiplo de 6.
c) la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de cuatro.
d) la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es siempre un número impar.

11. El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se cuentan de 2 en 2, sobra una; de 3 en 3 sobran dos; de 5 en 5 sobran cuatro y de 7 en 7 sobran seis. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

12. Un pasillo rectangular de 860 cm. de largo y 240 cm. de ancho se ha embaldosado con baldosas cuadradas de la mayor dimensión posible para que cupieran un número entero de estas. ¿Cuál es la dimensión de cada baldosa? ¿Cuántas baldosas se han empleado?

13. El m.c.m. de los términos de una fracción es 340. Determina dicha fracción sabiendo que no se altera su valor si se suma 20 al numerador y 25 al denominador .

14. Demuestra que si n es un número par los números $n(n^2+4)$ y $n(n^2-4)$ son múltiplos de 8.

15. Siendo n un número natural, demuestra que $2n^3 + 3n^2 + n$ es divisible por 6.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.
Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.
Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.
Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.
Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.
Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.
Maza, C. (1991). *Multiplicación y división. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.
Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).
Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.
Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-256). Madrid: Síntesis.
Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.
Udina, F. (1989). *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis.

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 4:

FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES EN PRIMARIA

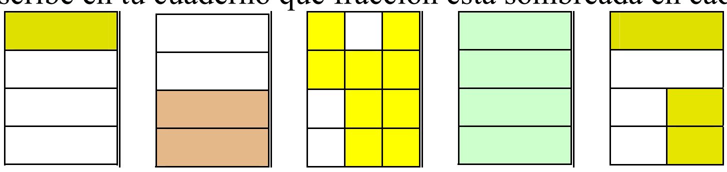
Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Escribe en tu cuaderno qué fracción está sombreada en cada caso



2. En una granja, de cada 10 animales, 5 son aves, 3 son vacas y 2, ovejas.
   - Representa, con un gráfico, la fracción de cada tipo de animales.
   - ¿Qué fracción representan las vacas y las ovejas juntas?
   - De cada 5 aves, 3 son gallinas, ¿Qué fracción del total de animales son gallinas?

3. Copia al lado de cada fracción cómo se lee:

$$\frac{3}{5} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{7}{11} \qquad \frac{10}{8}$$

4. Entre cinco personas compran una bolsa de naranjas de 4 kg por 490 pts.
   - ¿Qué peso, en kilos, corresponde a cada persona?
   - ¿Cuánto dinero tiene que pagar cada una?
   - Expresa cada resultado en forma de fracción y calcula su valor

5. De las 25 personas de la clase de Laura 3/5 son niñas. ¿Cuántos niños hay?
6. Laura ha recorrido los 2/3 del trayecto de su casa al colegio, que mide 570 m.

Roberto ha recorrido también los dos tercios del suyo, que es de 420 m. ¿Han recorrido Laura y Roberto la misma cantidad de metros? ¿Y la misma fracción de su camino respectivo?

7. De la superficie total de España (504.000 km^2, aproximadamente), los dos tercios son de paisaje llano. ¿Cuántos kilómetros cuadrados representa esta fracción? ¿Cuánta superficie montañosa hay en España?

8. Escribe y representa con dibujos: a) Dos fracciones iguales a la unidad; b) Dos fracciones menores que la unidad, c) Dos fracciones mayores que la unidad.

9. Las fracciones 3/4, 2/5, 3/8, y 8/10 son menores que la unidad. Compruébalo hallando sus expresiones decimales. Haz lo mismo con 7/5, 6/4, 3/2 y 13/10, que son mayores que la unidad.

10. Comprueba que las fracciones 6/5 y 12/10 son equivalentes. Halla ahora el valor decimal de cada una. ¿Qué observas? Haz lo mismo con las fracciones 54/3 y 8/6.

11. Escribe una fracción simplificada de 16/12, 4/8, 10/15, 8/10 y 12/21.

12. Encuentra fracciones equivalentes a 6/18 con estas condiciones:

Numerador	3		4	1	
Denominador		6			5

¿Puedes llenar todas las casillas¿ ¿Por qué?

13. Ordena de menor a mayor:

a) 6/2, 6/10, 6/4, 6/8; b) 13/4, 9/4, 5/4, 8/4; c) 7/5, 8/9, 12/5, 6/9; d) 5/4, 7/5, 3/2, 7/8.

14. Calcula: a) 3/5 de 1.500 euros; b) 7/9 de 9.000 kilos; c) 4/3 de 175'4 metros; 6/10 de 3.854 personas.

15. Comprueba gráficamente, con el producto cruzado de los términos y hallando el valor decimal, cuáles de estos pares de fracciones son equivalentes:
    a) 3/4 y 1/5; b) 6/4 y 9/6; c) 5/10 y 4/8; d) 7/2 y 28/8

16. En el pueblo de Sergio, los 5/8 de toda la producción agrícola corresponden a las frutas. Las manzanas suponen los 3/8 de la producción total. ¿Qué fracción corresponde al resto de las frutas.

17. Una fuente echa 5/4 litros de agua cada segundo. ¿Cuántos litros arroja en un minuto?

18. El padre de Sergio ha hecho un mural rectangular de cerámica que mide 1/2 metro de base y 3/4 de metro de altura. ¿Qué superficie tiene el mural?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FRACCIONES Y RAZONES

Nos encontramos con frecuencia situaciones en las que es preciso dividir un todo en partes, repartir un conjunto de objetos en partes iguales o medir una cierta cantidad de una magnitud que no es múltiplo de la unidad de medida. Para resolver estas situaciones prácticas, tenemos necesidad de expresar el cociente de dos números naturales (en los casos en que no es un número natural) . Ello nos lleva a la idea de fracción y tras un proceso de abstracción a la introducción de los números racionales. En este tema comenzamos analizando las situaciones prácticas que nos llevan a la idea de fracción y estudiamos los números racionales y sus operaciones.

1.1. Situaciones de uso de fracciones y razones

1. Situaciones de reparto

1.1. Partición de un todo

Se trata de situaciones en las que un todo constituido por uno o más objetos se divide en partes iguales y se toman o consideran algunas de esas partes. Cuando decimos que una parte es a/b del total queremos decir que el total se ha dividido en b partes iguales y que el trozo al que hacemos referencia está formado por un número a de dichas partes. Si el todo está compuesto por un número de elementos iguales, que a su vez es múltiplo de b, la partición consiste en formar b subconjuntos disjuntos del mismo número de elementos y tomar a de ellos. El todo puede ser continuo o discreto.

Ejemplo (todo continuo): Si repartimos una tarta entre tres personas decimos que cada una de ellas recibe 1/3.

Ejemplo (todo discreto): En una urna hay 5 bolas blancas y 3 negras. Decimos que la probabilidad de obtener una bola blanca es 5/8, porque los casos favorables son 5 de los 8 posibles.

1.2. Reparto equitativo en las que el número de objetos a repartir no es múltiplo del número de individuos entre los que se efectúa el reparto.

Los objetos pueden ser divididos en partes sin que pierdan sus propiedades básicas En este caso la existencia de un resto obliga a dividir en partes iguales la unidad de reparto para poder seguir repartiendo el resto de forma igualitaria entre los individuos. Por tanto, si cada individuo recibe a/b objetos significa que cada uno de los objetos a repartir ha sido dividido en b partes iguales y se ha entregado a de ellas a cada individuo.

Ejemplo: Se desea repartir, de manera equitativa, 5 tartas entre 8 niños. Cada tarta se divide en ocho porciones iguales y se dan 5 de ellas a cada niño. El resultado del reparto se expresa con la escritura, 5/8.

1.3. Reparto proporcional de una cierta cantidad en partes que guardan una cierta relación.

En las sociedades jerarquizadas existen repartos o contribuciones que no son equitativos, sino que los individuos reciben o contribuyen en función de su jerarquía social y económica. La relación entre las cantidades repartidas puede ser de tipo aditivo o de tipo multiplicativo según que lo que se mantenga constante sea la diferencia entre las cantidades a repartir o el cociente.

- Si se efectúa un reparto en que uno de los individuos tiene que recibir 3 unidades más que otro (relación aditiva), si el segundo recibe 2 unidades, el primero recibirá 5; y si el segundo recibe 20 unidades, el primero recibirá 23.
- Si en un reparto un individuo recibe 3 veces más que otro (relación multiplicativa), recibirá 6 unidades si el segundo recibe 2, o 60 unidades si el segundo recibe 20. En este caso, decimos que el reparto se hace en la *razón 3 a 1*. Si el reparto se hace en la razón $a{:}b$ o a — b (que son las dos maneras de denotar las relaciones multiplicativas), por cada a objetos o cantidades que reciba el primer individuo el segundo debe recibir b objetos o cantidades.

  Ejemplo: Este tipo de reparto se usa en el muestreo proporcional. Por ejemplo, si en una población electoral la proporción de jóvenes es el 30% del total de votantes, al elegir una muestra de 1000 personas se incluirá en la misma 300 jóvenes.

2. Situaciones de medida

2.1. Por fraccionamiento de la unidad

En estas situaciones existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o alguno de sus múltiplos. Para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide a/b unidades quiere decir que dividiendo la unidad en b partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número a de dichas partes.

Ejemplo: Cuando decimos que un botellín de coca cola tiene 250/1000 litros.

2.2. Por commensurabilidad

Situaciones de medida en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales.

En este caso, dadas dos cantidades de magnitud A y B (por ejemplo, dos varillas de longitudes A y B), decimos que están en la razón $a : b$ si repitiendo b veces la cantidad de magnitud A y a veces la cantidad de magnitud B, se obtienen dos cantidades de magnitud iguales, es decir, $b\mathrm{A} = a\mathrm{B}$. Si la cantidad de magnitud B se toma como unidad de medida se dice entonces que $a : b$ es la medida de A respecto de la unidad B. Este proceso de medida se llama "medida por conmensurabilidad" (medida común).

Los pares de números naturales $a : b$, o separadas por un guión a — b, que aparecen en este segundo tipo de situaciones suelen recibir el nombre de razones y tienen todos ellos la particularidad de que si dos cantidades de magnitud A y B están en la razón $a : b$ se cumple que $b\mathrm{A}=a\mathrm{B}$. Al primer número del par se le llama "antecedente" o primer término de la razón y al segundo "consecuente" o segundo término de la razón[1].

[1] En el caso particular de que el segundo término de una razón sea 100, a dicha razón se le llama porcentaje. Decir que una cantidad de magnitud A es el "35 por ciento", 35%, de otra B, equivale a decir que 100A = 35B.

Las situaciones de comparación multiplicativa de los cardinales de dos conjuntos es un caso particular de medida por conmensurabilidad en el que las magnitudes son discretas.

En algunas ocasiones se establecen relaciones multiplicativas entre dos conjuntos con efectos de comparación, o se comparan cantidades de diferentes magnitudes discretas. En este uso se supone que los dos conjuntos son partes de un conjunto global y se comparan las partes entre sí, y no las partes con el todo.

Ejemplo: Cuando decimos que en una Facultad hay 3 chicos por cada 7 chicas. La razón entre el número de chicos y chicas es 3/7.

La similitud con la conmensurabilidad se ve teniendo en cuenta que si tomamos 7 grupos de 3 chicos obtenemos la misma cantidad de personas que si tomados 3 grupos de 7 chicas. En ambos casos se obtiene 21 personas.

3. Situaciones de trueque, en las que dos individuos intercambian mercancías de distintos tipos.

Un trueque se efectúa en la razón $a: b$ si por cada a objetos de un tipo que el primer individuo le entrega al segundo, este último le entrega al primero b objetos de otro tipo.

Ejemplo: Cuando compramos una bolsa de naranjas de 3 kilos por 4 euros. En este caso podemos decir que el trueque es 4: 3 euros el kilo o, alternativamente que el precio unitario del kilo de naranjas es 4/3 de euro.

4. Situaciones de transformación

En el estudio del cambio de un objeto, un conjunto de objetos o una cantidad de magnitud, cuando se compara un estado actual con otro pasado o futuro también se utilizan fracciones. En este caso la fracción tiene un uso como función u operador que se aplica sobre una cantidad inicial para hallar una cantidad final.

Ejemplo: Cuando se dice que el crecimiento de la población es del 10 por ciento o que el precio de unas acciones se ha reducido a los 3/4 de su valor.

5. Situaciones de división no entera

En el contexto algebraico, la solución de la ecuación $a = bx$, con a y b enteros y cuando b no es un divisor de a y distinto de 0, se expresa mediante la fracción a/b, dejando indicado el cociente entre los números a y b.

En el proceso de solución de las situaciones anteriores puede haber una fase (con frecuencia implícita) en la que las cantidades que aparecen se reducen a sus respectivas medidas (números enteros). Con ello se pasa de una situación empírica a otra formal (algebraica) en la que la fracción expresa el cociente indicado de los números correspondientes.

Los distintos tipos de situaciones de uso de las fracciones y razones que hemos descrito proporcionan sentidos (o significados pragmáticos) diferentes de estos objetos matemáticos, poniendo en juego acciones e informaciones contextuales diferentes. El objeto matemático "número racional", que se presenta en la siguiente sección, debe ser abstraído de toda esta variedad de situaciones y operaciones concretas.

Ejercicio

1. Clasifica los problemas incluidos en la parte A (incluidos en libros de primaria) según los tipos de situaciones descritas en esta sección.

1.2. Distinción entre fracciones y razones

En los ejemplos que hemos introducido las razones utilizadas son siempre entre números enteros y se podía pensar que la razón es equivalente a una fracción. Sin embargo, en algunas situaciones el uso que se hace del término razón es más amplio que el de fracción, por lo que algunos autores diferencian entre estos dos términos. Estas situaciones son las siguientes:

- Cuando se comparan los tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, y no tiene sentido pensar en un conjunto global que los contenga. Por ejemplo cuando se dice que en una ciudad hay 2 automóviles por cada 5 habitantes.

- Las razones se pueden expresar mediante símbolos diferentes de fracciones: 4: 7, o 4 $\rightarrow$ 7; el símbolo de la fecha indica bien el aspecto de correspondencia de una razón, como medio de comparar cantidades.

- Las razones pueden tener un cero como segunda componente. En una bolsa la razón de bolas rojas a verdes puede ser de 10 a 0, si no hay ninguna verde. En las fracciones el denominador siembre debe ser distinto de cero.

2. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES. NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

En los problemas que hemos descrito, fracciones diferentes, por ejemplo, 2/3 y 4/6, producen el mismo resultado. En efecto, en las dos siguientes situaciones de expresión de una parte de un todo discreto:

"De los 18 alumnos de la clase, los 2/3 son chicas".

"De los 18 alumnos de la clase los 4/6 son chicas",

el número de chicas es el mismo, 12. En realidad, disponemos de infinitas fracciones para comparar el número de chicas 12 con el total de la clase 18:

2/3, 4/6, 6/9, 8/12, etc. Decimos que estas fracciones son equivalentes entre sí.

Esta situación se suele ilustrar en la escuela primaria mediante gráficos como el siguiente:

⊕	⊕	⊕	⊕	◊	◊
⊕	⊕	⊕	⊕	◊	◊
⊕	⊕	⊕	⊕	◊	◊

4/6 de 18 chicas = 12 chicas

◊	◊	◊	◊	◊	◊
⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕
⊕	⊕	⊕	⊕	⊕	⊕

2/3 de 18 chicas = 12 chicas

Fracciones equivalentes. Caracterización:

Dos fracciones a/b, c/d son equivalentes si se cumple “la igualdad de los productos cruzados”, o sea: a.d = b.c.

En efecto, si a.d = b.c, dividiendo ambos miembros por b.d y simplificando se obtiene,

$$\frac{a.d}{b.d} = \frac{b.c}{b.d}; \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Y viceversa, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ multiplicando ambos miembros por b.d y simplificando se obtiene que a.d = b.c

Esta relación cumple las tres condiciones exigidas a las llamadas relaciones de equivalencia, o sea:

- Reflexiva: toda fracción es equivalente a sí misma;
- Simétrica: si una fracción x es equivalente a otra fracción y e y es equivalente a x, entonces x e y son la misma fracción;
- Transitiva: si una fracción x es equivalente a otra fracción y e y es equivalente a otra fracción z, entonces x y z son equivalentes

Es importante destacar que en la mayor parte de las situaciones, las fracciones equivalentes se usan indistintamente. Intuitivamente vemos que dos fracciones equivalentes, tales como 2/3 y 4/6 se refieren a una misma cantidad si se trata de una magnitud o a una misma razón si se trata de una comparación. Lo mismo ocurre con todas las fracciones equivalentes a la dada: 3/9, 20/30, 200/300, etc. Esta idea intuitiva se formaliza introduciendo los números racionales.

Número racional

El conjunto de las fracciones queda dividido en “clases de equivalencia”, cada una de ellas formada por todas las fracciones equivalentes entre sí. Cada una de las clases se dice que es un *número racional*; y el conjunto de todas las clases, el conjunto de los números racionales Q (incluyendo los números positivos y negativos, como se explica en el capítulo 6). Esta descripción abstracta se puede interpretar desde un punto de vista más intuitivo:

El número racional [2/3] = {2/3, 4/6,...} lo identificamos con la fracción 2/3 cuando es usada como representante de cualquier otro miembro de la clase de fracciones equivalentes a 2/3.

Las distintas fracciones de una misma clase de fracciones equivalentes son todas ellas diferentes unas de otras. Cuando se escribe:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15}$$

estas tres fracciones, en tanto que tales fracciones, no son iguales entre sí, sino equivalentes (se puede sustituir una por otra). Pero todas estas fracciones representan la misma clase de equivalencia, el mismo número racional. Por ello usamos el símbolo de igualdad.

Algunos textos y documentos curriculares usan la expresión "número fraccionario" para referirse al número racional.

La equivalencia de fracciones y razones es la propiedad que justifica varias técnicas importantes de manipulación de racionales. Una de ellas es la técnica de 'simplificación de fracciones' que nos permite pasar de una fracción a la fracción irreducible[2] equivalente a ella y que consiste en dividir numerador y denominador por el máximo común divisor de ambos números. Otra técnica es la de 'reducir a común denominador' o 'reducir a común numerador' varias fracciones, técnica consistente en elegir fracciones equivalentes a las dadas, todas ellas con el mismo denominador o con el mismo numerador, para lo cual hay que buscar el mínimo común múltiplo de los denominadores o numeradores.

La equivalencia de razones permite establecer la *'regla de tres'*, técnica que permite encontrar uno de los términos de una proporción conocidos los otros tres y que se basa en el hecho ya comentado de que en una igualdad entre dos razones (proporción) los productos en cruz son iguales. Si el término desconocido es un extremo se obtendrá multiplicando los términos medios de la proporción y dividiendo el resultado por el otro extremo. Si el término desconocido es uno de los términos medios de la proporción se obtendrá multiplicando los extremos y dividiendo el resultado por el término medio conocido.

Fracciones irreducibles:

Cuando trabajamos con un número racional, conviene designarle por la fracción más simple posible, como por ejemplo, 3/5 en el ejemplo anterior. Estas fracciones que no se pueden simplificar (dividiendo numerador y denominador por el mismo número) se llaman *fracciones irreducibles*.

Números racionales particulares

- Todo *número entero* es un racional, pues cualquier entero se puede escribir en la forma de fracción:
  - 0 = 0/1 = 0/2 =...
  - 1 = 1/1 = 2/2 =...
  - 2 = 4/2 = 6/3 =...

- Todo *número decimal* es un racional, pues todo número decimal se puede escribir bajo la forma de una fracción cuyo denominador es una potencia de diez.

  1’2 = 12/10 (= 6/5)

  34’56 = 3456/100

En consecuencia, el conjunto de los enteros y el de los decimales son subconjuntos de Q, el conjunto de los números racionales.

Ejercicios

2 ¿Puedes simplificar la fracción 1/3? ¿Y 3/5? ¿Por qué? ¿Y amplificarlas?

3. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de éstas: 2/5; 3/2; 10/4.

[2] Se llama fracción irreducible a una fracción en la que numerador y denominador son primos entre sí, es decir, no tienen ningún factor primo común.

4. Entre tres amigos se han repartido 360 cromos de la siguiente manera: al primero 3/9, al segundo 4/12 y al tercero 1/3. ¿Cuántos cromos le corresponde a cada uno? ¿Qué relación hay entre las tres fracciones?

5. ¿Cuál de las siguientes fracciones es irreducible? 10/21; 15/24; 220/1617

6. Reduce la fracción 12/20, ¿por qué número debes dividir numerador y denominador? ¿ y para reducir la fracción 28/42? ¿Puedes encontrar una regla general para reducir una fracción?

7. Demuestra que 8/29 =6/15.

3. PRIMERAS PROPIEDADES DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO

El concepto de *número racional positivo* se ha construido a lo largo de varios miles de años y durante muchos siglos, su definición estuvo ligada a contextos concretos de medida y reparto. En estas condiciones, surgieron los conceptos de fracción y razón que inicialmente fueron conceptos independientes. A partir de ellos, se sintetizó, posteriormente, el concepto de número racional positivo y, más tarde, el de número racional.

Puesto que detrás del concepto de número racional están los conceptos de fracción y razón y las situaciones de reparto y medida que les dan sentido, justificaremos la compatibilidad de sus propiedades con las referidas situaciones.

En lo que sigue, representaremos los racionales positivos con la notación *a/b,* o, $\frac{a}{b}$, salvo cuando tengan un significado específico como razones, pues entonces utilizaremos la notación *a : b* o a — b.

1. *Si a ≠ b, los números racionales representados por las fracciones a/b y b/a son distintos.*

Esta propiedad es evidente en cualquiera de las situaciones. Se dice que los racionales *a/b* y *b/a* son inversos el uno del otro.

> Ejemplo: La cantidad de magnitud que mide *a/b* unidades es distinta de una cantidad de magnitud que mida *b/a* unidades.
>
> Ejemplo: Si una cantidad se reparte proporcionalmente entre dos individuos el resultado del reparto es distinto según que éste se haga en la razón *a : b,* o en la razón *b : a*, etc.

2. El denominador de una fracción no puede ser cero, el numerador si puede serlo.

El denominador de una fracción no puede ser cero porque no tiene sentido fraccionar la unidad de medida en cero partes o repartir entre cero individuos.

En cambio, un numerador cero indica que no se toma ninguna de las partes en que se ha dividido la unidad, o que en la cantidad de magnitud a medir no cabe ninguna de dichas partes, lo que sí es posible.

Nota: Sin embargo, en un reparto proporcional tienen sentido tanto la razón 0 : *b* como la *a* : 0; en los dos casos significa que una de las personas lo recibe todo y la otra no recibe nada. Pero en este caso no hablamos de número racional.

3. El racional 0 es el que tiene como representante cualquier fracción de la forma 0/b

Si en la medida, bien por fraccionamiento de la unidad, bien por conmensurabilidad, de la cantidad de magnitud de un objeto, se obtiene un racional 0/b eso significa que ese objeto no tiene cantidad de magnitud, lo que en términos de números naturales se expresa diciendo que la cantidad de magnitud es 0.

4. Las fracciones con numerador igual al denominador son equivalentes y representan al número racional 1

Esta propiedad se justifica porque si una cantidad de magnitud mide *b/b* unidades significa que la unidad se divide en *b* partes y se toman esas *b* partes y esto equivale a la unidad.

En las situaciones de reparto proporcional también podemos decir que repartir en la razón 4 : 4 equivale a repartir en la razón 1:1.

5. El numerador de una fracción puede ser mayor, igual o menor que el denominador y *en consecuencia hay números racionales mayores, iguales o menores que la unidad.*

- Si el número racional lo interpretamos como una razón no hay ningún problema, tanto sentido tiene la razón 7 : 3 como la 3 : 7.
- Puede ser más difícil de justificar en las situaciones de partición de un todo, pues si, por ejemplo, descomponemos un todo en 3 partes, el racional 7/3 indica que se han tomado 7 de dichas partes y ¿de dónde salen las 7 partes que se toman si inicialmente sólo se dispone de 3?
- En las situaciones de medida por fraccionamiento de la unidad 7/3 indica que la cantidad de magnitud de un objeto equivale a 7 terceras partes de la unidad de medida. En la práctica, primero contamos cuántas veces cabe la unidad entera en la cantidad de magnitud a medir y utilizamos el fraccionamiento de la unidad para dar la medida del resto. En ese caso en vez del racional 7/3 aparece como resultado de la medida el 'número mixto' $2\frac{1}{3}$.

A las fracciones del tipo 7/3 se las ha llamado, tradicionalmente, 'fracciones impropias', porque se consideraba que la forma correcta de expresar la medida correspondiente era convirtiéndolas en un número mixto[3].

La técnica de convertir las fracciones impropias en números mixtos consiste en efectuar la división entera entre el numerador y el denominador. El cociente obtenido será la parte entera del número mixto y el resto será el numerador de la nueva fracción, que deja de ser una fracción impropia.

6. *Los fracciones de denominador 1 representan a los números naturales* que son, por tanto un subconjunto de los racionales.

- En la situación de medida por fraccionamiento de la unidad, si una cantidad de magnitud mide, por ejemplo, 4/1 unidades significa que la unidad no se ha descompuesto en partes y, por lo tanto, equivale a decir que mide 4 unidades.

[3] Al número expresado como suma de un número natural a y una fracción b/c se le llama 'número mixto' y se representa por $a\frac{b}{c}$ omitiendo el símbolo de la suma.

- En el caso de medida por conmensurabilidad, si la cantidad de magnitud A mide 7/1 unidades, significa que A es igual a 7 veces la unidad, lo que también permite identificar 7/1 con el número natural 7.

Ejercicios

8. Explica por qué 0/5 = 0. Explica por qué 0/0 no está definido.
9. Busca un contraejemplo numérico de que x/(x+y) puede ser distinto a 1/(1+y).
10. Encuentra m, para que m/6=10/15.

4. OPERACIONES CON FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

Puesto que un número racional viene representado por una infinidad de fracciones equivalentes, para operar con dos números racionales *x* e *y,* basta operar con alguna de las fracciones que representan a *x* y a *y.* La clase de equivalencia representada por el resultado de la operación es un número racional, resultado de operar con los números racionales *x* e *y.* Usualmente lo que hacemos es elegir la representación más simple posible, es decir la fracción irreducible que representa a ese número racional. En consecuencia definimos las operaciones con fracciones.

4.1. Suma y diferencia de fracciones y números racionales positivos

La suma y diferencia de fracciones se justifica a partir del mismo tipo de situaciones que daban sentido a la suma y diferencia de naturales, es decir, situaciones de parte-todo, de reunión, de transformación o de comparación. Por tanto, el sentido de la suma y diferencia no cambia, cambian únicamente las cantidades que intervienen, que ahora son medidas o partes de un todo, mientras que antes eran cardinales u ordinales.

La suma de dos fracciones de igual denominador se define como el resultado de sumar los numeradores y dejar invariante el denominador,

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

*Ejemplo:*En una reunión, 2/6 de las personas son hombres y 3/6 son mujeres, ¿Qué fracción de los presentes son adultos?

La diferencia de fracciones de igual denominador es el resultado de restar los numeradores y mantener el mismo denominador.

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Por supuesto, para que una diferencia de fracciones positivas sea posible tiene que ser el primer numerador mayor o igual que el segundo.

Suma de fracciones de distinto denominador

Si tienen distinto denominador, se reducen a común denominador y se aplican las definiciones anteriores (en este caso lo que se está sumando o restando son los racionales representados por dichas fracciones). En la práctica se habla de suma de fracciones de distinto denominador.

Estas definiciones se justifican bien a partir de situaciones de medida por fraccionamiento de la unidad. Por ejemplo, si yo tengo una cantidad de magnitud A que mide 3/5 unidades y otra B que mide 8/5 la unión de las dos cantidades de magnitud será una nueva cantidad de magnitud que medirá 11/5.

Suma y diferencia de números racionales

La suma o diferencia de dos racionales será el racional definido por la suma o diferencia de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea sumar o restar.

Propiedades:

De las propiedades de la suma de fracciones, se deducen las siguientes propiedades para la adición de números racionales:

- Es una operación binaria e interna en el conjunto Q;
- Es asociativa;
- Es conmutativa;
- Tiene elemento neutro (el 0);
- Todo elemento tiene simétrico (el opuesto).

Ejercicios

11. En Córdoba, durante el año pasado, las 4/5 partes de los días la temperatura superó los 25ºC, mientras que en León sólo ocurrió ésto una sexta parte de los días, aproximadamente, ¿Cuántos días hubo más de 25ºC en Córdoba? ¿Y en León?

12. Ilustra las siguientes sumas y diferencias de fracciones usando el modelo de áreas: 2/5+3/8; 4/7-2/11.

13. Supón que tienes que explicar a un niño los pasos a dar para sumar dos fracciones. Escribe una lista de todos estos pasos. Dibuja un organigrama que el niño pueda seguir para resolver la tarea con éxito.

14. Si el precio de un producto sube de 3 1/3 de euro el kilo a 4 1/8 de euro. ¿En cuántos euros se incrementa el precio? ¿Qué tanto por ciento de subida supone sobre el precio inicial?

4.2. Producto y cociente de fracciones y números racionales positivos

A diferencia de lo que sucede en la suma, el sentido del producto de racionales cambia respecto al producto de naturales. En estos últimos un producto significa, ante todo, una suma repetida; sin embargo, en el caso de las fracciones y racionales no es posible interpretar el producto $\frac{3}{4}x\frac{1}{5}$ como el resultado de sumar 1/5 repetidas veces porque el número de veces no puede ser fraccionario.

La situación que permite entender mejor el sentido del producto de racionales es la de partición de un todo plural, un todo que se compone de una colección de objetos homogéneos. Supongamos un conjunto de 70 lápices iguales. Obtener los 3/5 del total significa descomponer el conjunto en 5 subconjuntos de 14 lápices cada uno y coger 3 de dichos subconjuntos. En total, obtendremos 42 lápices. Si ahora tomamos los 4/7 de esa última cantidad, eso significa descomponer el conjunto de 42 lápices en 7 subconjuntos de 6 lápices cada uno y tomar 4 de esos subconjuntos. El resultado final son 24 lápices. Pero si calculamos los 12/35 de la cantidad inicial de lápices se obtienen también 24 lápices. Esto quiere decir que calcular los 4/7 de los 3/5 de 70 es lo mismo que calcular los 12/35 de 70.

En general, se comprueba que *a/b* de *c/d* de cualquier cantidad es lo mismo que $\frac{ac}{bd}$ de esa misma cantidad. Por tanto, el producto de dos fracciones se define de la manera siguiente:

$$\frac{a}{b}\text{x}\frac{c}{d}=\frac{a\text{x}c}{b\text{x}d}$$

y su sentido es el de una *fracción de fracción*.

El producto de dos racionales será el racional definido por el producto de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea multiplicar.

El cociente de fracciones y racionales tampoco tiene el sentido de reparto o resta reiterada de la división entre naturales, sino que es, simplemente la operación inversa del producto.

Se define el cociente de fracciones como el producto de la primera fracción por el inverso de la segunda:

$$\frac{a}{c}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\text{x}\frac{d}{c}=\frac{a\text{x}d}{b\text{x}c}$$

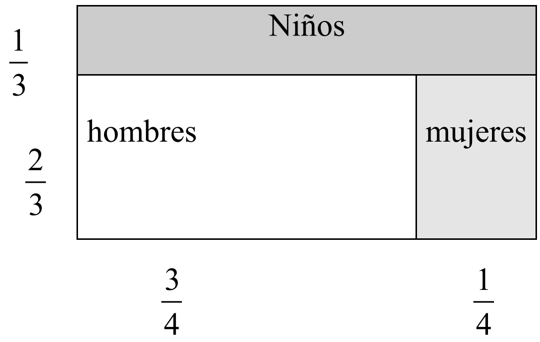
El cociente de dos racionales será el racional definido por el cociente de dos fracciones representantes de cada uno de los dos racionales que se desea dividir.

Ejemplo:

En una reunión hay 24 personas, los 2/3 de los presentes son adultos y ¾ de los adultos son hombres.

a) ¿Cuántas personas adultas hay en la reunión?
b) ¿Cuántos niños hay en la reunión?
c) ¿Qué fracción son los hombres respecto del total de personas?

La representación gráfica mediante áreas de rectángulos permite expresar adecuadamente la situación:



Ejercicios

15. Si 1/3 de la cosecha de aceituna se estropea por causa de una tormenta y 1/10 de lo que quedó se perdió por causa de una plaga, ¿qué fracción de la cosecha pudo ser utilizada?

16. En un festival los 2/3 son adultos y de ellos los 3/5 son hombres. Hay 20 niños y niñas más que mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay en el festival?

17. Inventa un problema cuya solución sea 5: 1/10.

18. Cuando lanzamos una pelota desde una cierta altura, rebota hasta ¼ de la altura a que se lanzó. Si después de tres botes la altura alcanzada es 10 cm ¿A qué altura inicial se lanzó la pelota?

4.3. Orden de fracciones y racionales positivos

Para comparar entre sí dos números racionales comparemos dos fracciones representantes de cada uno de los dos números racionales que se desea comparar.

Dadas dos fracciones con el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador; si las fracciones tienen igual numerador será menor la que tenga el mayor denominador; si no tienen iguales los numeradores ni los denominadores se reduce a común numerador o denominador y se aplica una de las reglas anteriores.

Ejemplo: Si una cantidad de magnitud mide 3/11 unidades será menor que la cantidad de magnitud que mide 7/11 unidades y también menor que la que mide 3/5 unidades. También se puede ver que si un individuo recibe en un reparto en la razón 3 : 11 recibirá menos que si se repartiera en la razón 7 : 11.

Una propiedad muy importante del orden de racionales es que dados dos racionales, por muy próximos que los elijamos siempre podemos encontrar tantos racionales como queramos que sean mayores que uno de ellos y menores que el otro. Esta propiedad se suele enunciar diciendo que entre dos números racionales distintos existen siempre infinitos racionales. También se dice que el conjunto de los números racionales es un conjunto *denso*. Todo esto implica que en los números racionales, a diferencia de lo que sucede en los naturales, deja de tener sentido el concepto de número 'siguiente' o 'anterior' ya que nunca podremos encontrar dos racionales que no tengan otros racionales entre ellos.

La definición algebraica de orden en Q requiere previamente decir cuando consideramos que un racional es positivo. Esto se puede hacer del siguiente modo:

- El racional [*m/n*] es positivo si $m.n \in N$

Después de esto podemos decir que el racional *x* es menor que *y*, *x*<*y*, si la diferencia *y-x* es positiva.

Ejemplos:

- Para probar que 3/8 < 5/8 basta comparar los numeradores
- Para probar que 4/11 < 3/8, se reemplazan ambas fracciones por otras equivalentes con iguales denominadores, y se comparan los numeradores.

En general, si a, b, c, d son enteros y b y d son positivos, entonces,
a/b < c/d, sí y sólo sí a.d < d.c

Propiedades de la ordenación en Q:

Las siguientes propiedades son consecuencias de la definición de número racional positivo, de la definición de relación de orden y del hecho de que los racionales positivos son cerrados respecto de la multiplicación y adición.

Tricotomía: Si r y s con números racionales, entonces una de las siguientes relaciones es verdadera: r < s, r > s, o r = s.

Transitividad: Para números racionales r, s, y t, si r < s y s < t, entonces r < t.

Aditividad: Para números racionales r, s, y t, si r < s, entonces r +t < s + t.

Mutiplicatividad: Para números racionales r, s y t:

- Si r < s y t > 0, entonces, t.r < t.s:
- Si r < s y t < 0, entonces, t.r > t.s

Ejercicios:

10. Aplicar las propiedades anteriores para resolver la siguiente desigualdad:
$-2.x - 2/3 < 4/5$.

20. Encontrar un número racional entre 6/7 y 8/9.

21. Si x e y son números racionales y x > y, ¿Cuáles de las siguientes condiciones son ciertas?

- 1/x > 1/y
- 1/x < 1/y

5. TÉCNICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FRACCIONES

El siguiente ejemplo, tomado de Krause (1991), muestra el uso de varias técnicas para resolver problemas que ponen en juego las operaciones con números racionales. Las diversas técnicas ponen en juego recursos diferentes (aritméticos, algebraicos, geométricos y combinatorios)

Enunciado:

La población de un cierto estado es 5/8 urbana y 3/8 rural. Si ¼ de la urbana y 1/6 de la rural es menor de 18 años, ¿qué fracción de la población del estado es menor de 18 años?

Solución 1 (Aritmética):

Comenzamos suponiendo que la población total del estado es un número particular de personas. Dicho número se debe elegir teniendo en cuenta los denominadores de las fracciones que intervienen en el enunciado, de manera que al ser aplicadas a la cantidad supuesta los cocientes correspondientes sean exactos. En este caso, el producto de los denominadores 8, 6 y 4, esto es, 192 (millones, por ejemplo) es suficiente.

Según esto, la población urbana será 120 millones de personas, 30 de los cuales son menores de 18. La población rural es de 72 millones de personas, y hay 12 menores de 18 años. Por tanto, hay 30 + 12 = 42 millones menores de 18 años.

La fracción pedida será: 42/192, o bien, simplificando, 7/32.

Solución 2 (Algebraica):

Sea n la población total. Entonces,

La población urbana es: $\frac{5}{8}.n$

La población urbana menor de 18 años: ¼ . $\frac{5}{8}.n = \frac{5}{32}.n$

La rural es: $\frac{3}{8}.n$

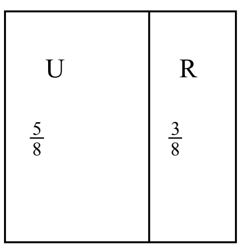
La rural menor de 18 es: $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}.n = \frac{3}{48}.n$

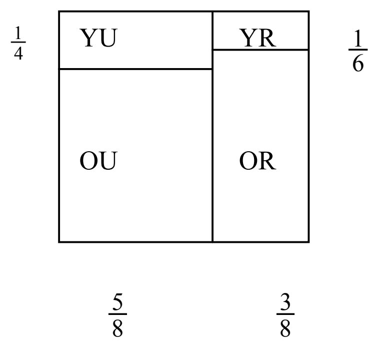
La población total menor de 18 años es: $\frac{5}{32}n + \frac{3}{48}n = \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{48}\right)n = \frac{7}{32}n$

Solución 3 (Geométrica):

Tomamos el cuadrado unidad para representar la población. Dividámoslo, según se muestra en la figura, para representar a la población rural (R) y urbana (U). Y a continuación a la población menor de 18 años (Y) y mayor (O). Obtenemos cuatro regiones. La fracción pedida es la suma de las áreas que interesan: YU y YR:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}=\frac{5}{32}+\frac{3}{48}=\frac{7}{32}$$

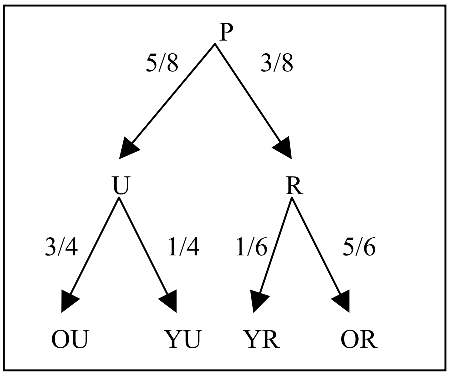




Solución 4 (Diagrama en árbol)

La comparación de tamaños entre varias poblaciones y subpoblaciones en este problema, se puede representar esquemáticamente por un diagrama de árbol, del tipo que aparece en la figura. La regla principal para usar este diagrama consiste en "multiplicar hacia abajo en las ramas". Por ejemplo, para encontrar qué fracción de la población total (P) es menor de 18 años y rural (YR), multiplicar los números que aparecen en las ramas que llevan de P a YR: 3/8 . 1/6 = 1/16.

La regla se puede justificar si nos referimos a la figura utilizada en la solución geométrica.



Ejercicios:

Resuelve los siguientes problemas aplicando los cuatro métodos que hemos descrito en el ejemplo anterior.

22. Al examen de junio de matemáticas se presentan 3 de cada 5 alumnos matriculados, y por cada 5 alumnos que aprueban hay 2 que suspenden. ¿Qué fracción de a los alumnos matriculados aprueban en junio?

23. En una planta depuradora de aguas residuales, el tratamiento del agua se realiza en tres etapas. En una primera se quitan los 9/10 de los fosfatos. En la segunda se quitan los ¾ de los que quedan. Y en la tercera, se quita ½ de los que aún lleva el agua. ¿Qué fracción de fosfatos se quitan en total del agua?

24. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol, que 1/6 del vermouth es alcohol, y que un martini se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermouth. ¿Qué fracción de alcohol lleva un martini?

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En la prensa diaria busca algunas situaciones en que aparezcan fracciones y razones. Para cada una de ellas, identifica el tipo de situación problemática presentada, entre las descritas en la sección 1.

2. En las siguientes situaciones identifica los distintos de usos de las fracciones que se ponen en juego. Expresa estos enunciados y la solución utilizando algún tipo de representación gráfica.

a) En una clase hay dos tercios de chicas. ¿Si hay catorce chicas en la clase? ¿Cuál es el número total de alumnos?
b) Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿A qué distancia está de su casa?
c) Un terreno mide 200 metros cuadrados. ¿Cuánto mide las 5/8 partes del terreno?
d) La tasa esperada de crecimiento anual del índice de precios es del 3/100. Si he comprado un piso de 120.000 euros y lo vendo dentro de un año por 122.000 euros, ¿he ganado o he perdido?

3. Una persona gasta cada mes la quinta parte de su salario mensual en alimentación y la sexta parte en alquiler del piso. Después de realizados estos pagos le quedan 570 euros. ¿Cuál es su salario mensual?

4. Un coche circula a 80 km/h durante 18 minutos. ¿Por qué número es necesario multiplicar la velocidad para encontrar la distancia que recorre expresada en km? ¿Cuánto tiempo necesitará para recorrer 64 km a esa misma velocidad?

5. Se considera el número A = 45501/56.

   a) Encontrar los dos enteros consecutivos que encuadran a A (o sea, el mayor entero menor que A y el menor entero mayor que A)
   b) Calcular en forma de fracción la diferencia entre A y cada uno de los enteros anteriores.
   c) Llamemos B al entero más próximo a A. Encontrar tres números racionales comprendidos entre A y B.

6. Demostrar que es posible pavimentar un rectángulo con baldosas cuadradas si y sólo si la razón entre las longitudes de la base y la altura es un número racional.

7. En una familia el padre obtiene 3/5 de los ingresos y el resto lo obtiene la madre. Mientras que ésta paga 2/10 de sus ingresos en concepto de impuestos directos en su declaración de la renta, el padre paga 2/11 de sus ingresos. La familia paga además 1/20 de sus ingresos en impuestos autonómicos y estiman que aproximadamente 3/50 de sus ingresos se pagan en impuestos indirectos (tabaco, gasolina, artículos de lujo, etc.). ¿Qué proporción total de ingresos paga en impuestos esta familia?

8. Realiza las siguientes operaciones:

a) $1+\frac{1}{2}$, b) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$, c) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$, d) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

¿Eres capaz de descubrir un patrón en esta serie? ¿Podrías, sin necesidad de hacer los cálculos, escribir los tres números siguientes?

9. Usando cálculo mental, decide si $20x\frac{1}{2}x2x\frac{1}{2}$:

- es menor que 22

- está comprendido entre 22 y 50
- es mayor que 40

10. Encuentra dos fracciones positivas cuya suma sea 2 y cuyo producto sea 7/16.

11. Una de cada 10.000 personas aproximadamente contrae tuberculosis a lo largo de su vida. Las pruebas para detectar la tuberculosis dan positivas en el 99/100 de las personas enfermas y también en el 2/100 de las personas sanas (falsos positivos)

- ¿Cuál es la probabilidad de contraer tuberculosis?
- En una población de 40.000 de personas, ¿Cuántas contraerán tuberculosis?
- ¿Cuántos falsos positivos hay?
- ¿Cuántos falsos negativos? (personas enfermas en las que el test es negativo)
- ¿Qué proporción de aquellos en los que el test da positivo está realmente enferma?

BIBLIOGRAFÍA

Castro, Enc. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la educación primaria. Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.285-314). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis

Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers* (2nd ed.).Toronto: D.C.Heath.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. París: Editions Marketing (Ellipses).

Post, Th. R. (Ed.) (1988). *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 5:

NÚMEROS Y EXPRESIONES DECIMALES

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE DECIMALES EN PRIMARIA

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria

1. ¿Qué quiere decir 3'2 mm? ¿Podrías medir esa longitud con tu regla? ¿Por qué?

2. ¿Qué significa el punto que separa las cifras 62.3 y 36.4 en una báscula y un termómetro?

3. Expresa en forma de número decimal: 6/10, 23/10, 63/100.

4. Expresa las siguientes cantidades en centésimas:
   a) 8'43; b) 0'7; c) 20'5; d) 26'3

5. ¿Qué número decimal está representado en cada caso:
   a) 2 decenas 3 unidades 2 centésimas y 3 milésimas;
   b) 0'02 + 0'5 + 70 + 400
   c) 1 unidad 1 décima y 1 milésima.

6. Indica cuáles de estas fracciones son fracciones decimales:
24/10 5/8 26/1000 32/25 13/100 4/20 7/10 25/1000

7. ¿Qué fracción decimal representa cada número?:
a) 0'25; b) 0'007; c) 0'45; d) 0'05; e) 0'06 f) 0'004

8. Ordena de mayor a menor: 15,56 10,257 36,2 15,65 10,57 3,62
9. Entre qué parejas de números está comprendido 5,345

- entre 5,33 y 5,34
- entre 53,3 y 53,4
- entre 5,34 y 5,35
- entre 5,35 y 5,36

10. Aproxima estos números a la unidad: 3,69 5,27 31,19 15,4 13,6 27,85

11. Escribe con cifras estas fracciones decimales:
a) Cuatro milésimas; b) Seis décimas; c) Veinte centésimas; d) Trece milésimas.

12. Con las teclas

.	0	3	6	9

de tu calculadora escribe:

a) el mayor número posible menor que 100
b) el número más próximo a 1
c) el número mayor posible
dI El número menor posible.

13. Realiza estas sumas: 2,36+1,34; 15,36+4,64

14. Calcula mentalmente, anota los resultados y comprueba con tu calculadora:
    - 1,5+0,01
    - 02,55-36,7
    - 16,25-5,3

15. Calcula el cociente exacto: 23,64:4

16. En España, cada persona adulta consume al año, por término medio, 65'5 kg de carne, 29'53 kg de pescado y 6'89 kg de legumbres. ¿Cuántos kilos consume al año, en total, de estos alimentos?

17. En un salto un león recorre 3,25 metros. ¿Qué distancia habrá recorrido en 30 saltos? ¿Y en 2000 saltos?

18. Mariano está en cama con anginas. La doctora le ha recetado una dosis de 5 centímetros cúbicos de un jarabe (aproximadamente una cucharada) tres veces al día. En el prospecto dice que cada centímetro cúbico de jarabe tiene 6'25 mg de "amoxicilina". ¿Cuánta "amoxicilina" toma Mariano en una dosis? ¿Y al día?

19. Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FRACCIONES DECIMALES. NÚMEROS DECIMALES

Decimos que una fracción es *decimal* si su denominador es una potencia de 10. Llamaremos *números decimales*[1] a los racionales para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante.

Ejemplos: El racional 7/4 es decimal porque la fracción 7/4 es equivalente a 175/100.
Sin embargo, 7/3 no es decimal porque cualquiera de sus fracciones equivalentes tiene un denominador con el factor primo 3 y, por tanto, no puede ser una potencia de 10. La descomposición en factores del denominador de una fracción irreducible representante de un número decimal no puede contener factores primos distintos de 2 o de 5.

En 1585 el matemático belga Simón Stevin, en su libro *La Disme,* propuso, fraccionar la unidad en décimas, centésimas, milésimas, etc. para medir cantidades de magnitudes menores que la unidad. Con este sistema, el resultado de una medida vendría siempre expresado mediante un número entero y fracciones decimales. Por ejemplo, $7+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$ metros, en el caso de una medida de longitud.

También sugirió que, en lugar de usar los denominadores para expresar las partes de la unidad en la parte fraccionaria del número, se podría adoptar un criterio de posición. Este criterio desembocó rápidamente en el actual, que consiste en poner una coma (o un punto) a la derecha de las unidades y escribir a continuación los numeradores de las fracciones decimales siguiendo el orden de décimas, centésimas, milésimas, etc., poniendo ceros cuando falta alguna de esas fracciones.

Ejemplo. El número $7\frac{3}{10}\frac{5}{100}$ se escribe 7’35. Sabemos que 3 hace referencia a décimas porque esa cifra ocupa el primer lugar a la derecha de la coma y que 5 se refiere a centésimas porque ocupa el segundo lugar a la derecha de la coma.

- De esta manera para las fracciones decimales podemos usar un sistema de representación decimal posicional equivalente al definido para los números naturales. La parte situada a la izquierda de la coma es la ‘parte entera’ del número decimal y la situada a la derecha de la coma la ‘parte decimal’.
- Los números naturales admiten un representante decimal cuya parte decimal es cero.
- Un número decimal admite un representante cuya notación decimal tiene un número

[1] Algunos autores llaman números decimales a cualquier número real expresado en forma decimal. Nosotros preferimos seguir el criterio de autores como Centeno (1988) o Socas (2001) y llamar números decimales únicamente a los números racionales que tienen como representante una fracción decimal. De este modo, diferenciamos entre las expresiones decimales de un número (que también existen para los reales) y los números decimales D que es un subconjunto de Q.

finito de cifras[2].

El interés de la representación decimal de las fracciones decimales se debe a la posibilidad que proporcionan de utilizar los algoritmos de cálculo definidos para los números naturales. Desde el momento en que la parte decimal de un número decimal se construye siguiendo las mismas reglas que se usan para la parte entera podemos trasladar los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división entera al caso de los números decimales sin más que añadir algunas consideraciones acerca de la colocación de las comas. Esto permite abreviar los cálculos con fracciones decimales. Si además el sistema de unidades de medida es decimal, todas las medidas pueden expresarse mediante números decimales y las operaciones entre ellas se hacen más fáciles. Esto último se puso en práctica a partir de la instauración del Sistema Métrico Decimal, creado en Francia a finales del siglo XVIII.

Ejercicios

1. Si la fracción a/b es irreducible, a < b y $b= 2x5^4$, ¿Cuántos dígitos decimales aparecen a la derecha de la coma al expresar esta fracción en forma decimal?

2. LOS NÚMEROS DECIMALES COMO SUBCONJUNTO DE Q. EXPRESIONES DECIMALES

2.1. Distinción entre expresión decimal y número decimal

La expresión 0’75 designa un *número decimal,* que también se puede escribir en forma de fracción, 75/100, la cual a su vez es equivalente a la fracción irreducible ¾. Son tres formas de escribir y de hablar sobre un número decimal particular.

La expresión o notación decimal con un número finito de cifras decimales se puede usar en todos los racionales que pueden ser representados por una fracción cuyo denominador es una potencia de diez[3]. Este subconjunto (D) de números racionales (Q) recibe el nombre de “conjunto de los números decimales” ($D \subset Q$).

Los *números decimales*, y la notación decimal con la que se expresan son de gran importancia en las matemáticas y sus aplicaciones prácticas debido a una propiedad importante: se trata de un *conjunto denso* en Q y en R (números reales), lo que quiere decir que cualquier número real x se puede acotar por medio de números decimales tan próximos a x como se desee (existe un número decimal cuya diferencia con x es tan pequeña como se quiera)

Observación:

Se tiene tendencia a llamar 'número decimal' a un número cuya expresión tiene una parte decimal “visible”. Pero los números naturales son también números decimales,

[2] Ejemplo, 1/5 = 2/10 = 0'2. Pero veremos después que el número decimal 0'2 se puede escribir también con infinitas cifras (0'199999 ...). Por tanto, la longitud de la expresión decimal no determina el carácter de decimal o no de un número racional.

[3] Posteriormente ampliaremos la representación decimal a otros racionales cualesquiera y a los números irracionales. Sin embargo, mientras que en los números decimales hay un representante cuya representación decimal es finita, en los demás casos esto no es posible.

simplemente su parte decimal (la escrita a la derecha de la coma) se reduce a 0 (o también a '9999...), y no se escribe. Por otro lado, existen racionales no decimales.

- Se llama *número decimal* a aquellos racionales que tienen una fracción representante con denominador potencia de 10 (fracciones decimales).
- Todos los números decimales son racionales, pero no todos los racionales son decimales.
- No obstante, cualquier racional no decimal se puede expresar en notación decimal, aunque el número de cifras a la derecha de la coma es infinito, con cifras que se repiten.

El número de cifras decimales es una característica de la expresión decimal (numerales) no de los números, ya que un mismo número se puede representar mediante diferentes expresiones decimales: 34’1 = 34’10 = 34’100, ... = 34'0999...

Los números decimales se pueden expresar también “en forma polinómica”, con potencias de base 10 (si se usa dicho número como base del sistema de numeración) usando exponentes positivos y negativos. Por ejemplo:

$$23'75 = 2.10 + 3 + \tfrac{7}{10} + \tfrac{5}{10^2} = 2.10^1 + 3.10^0 + 7.10^{-1} + 5.10^{-2}$$

que se lee, dos decenas, 3 unidades, 7 décimas y 5 centésimas.

La notación decimal para expresar los números racionales es importante ya que es más fácil trabajar con ella que con la notación de fracción. Por ejemplo, al comparar dos racionales es más rápido comparar las expresiones decimales que las fracciones:

Ejemplo: Para comparar 7/8 con 22/25 hay que reducir las fracciones a común denominador y comparar los numeradores. Sin embargo, si los expresamos en notación decimal, 7/8 = 0’875, y 22/25 = 0’88, vemos en seguida que 22/25 es mayor.

La notación decimal es también cómoda para encontrar un número racional comprendido entre otros dos dados. La mayor ventaja es en la realización de operaciones aritméticas, ya que se pueden usar algoritmos similares a los desarrollados para trabajar con números enteros.

2.2. Caracterización de los números decimales

Proposición: Si *r* es un racional representado por su fracción irreducible *n/d*, para que *r* sea un número decimal la descomposición del denominador *d* en factores primos sólo debe tener potencias de 2 y/o de 5.

En efecto, si el denominador tiene sólo los factores 2, 5 o ambos, podemos obtener una potencia de 10 en el denominador multiplicando numerador y denominador de dicha fracción por una potencia conveniente de 2 y/ o de 5.

Podemos probar que también es cierto el teorema recíproco, o sea que la condición es necesaria, por reducción al absurdo.

Supongamos que la fracción tenga un factor distinto, por ejemplo 3 (*a*/3). En este caso,

$$\frac{a}{3} = \frac{x}{10^n}$$

Factorizando 10^n en números primos tenemos:

$$\frac{a}{3} = \frac{x}{2^n.5^n}$$

lo cual conduce a: a. $2^n . 5^n = 3. x$

Este resultado contradice el teorema de factorización única de la aritmética según el cual todo número natural admite una descomposición única en factores primos. En este caso el factor 3 figura en el segundo miembro y no en el primero. Esto lleva a rechazar el supuesto de que la fracción *a*/3 corresponda a un número decimal.

3. TÉCNICA DE OBTENCIÓN DE EXPRESIONES DECIMALES

3.1. Caso de los números racionales decimales

Para encontrar la expresión decimal de un número decimal se busca una fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea una potencia de 10 y se descompone en parte entera, décimas, centésimas, etc.

Ejemplo. Si queremos expresar en notación decimal el número decimal 17/8, primero examinamos su denominador $8 = 2^3$ y vemos que es necesario multiplicarlo por 5^3 para obtener una potencia de 10. A partir de ahí se hace lo siguiente:

$$\frac{17}{8} = \frac{17x125}{8x125} = \frac{2125}{1000} = \frac{2000}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 2'125$$

Primera técnica

Una primera técnica consiste en encontrar la fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea una potencia de 10, escribir el numerador, contar en el numerador, empezando por la derecha, tantas cifras como ceros tiene el denominador y colocar la coma decimal.

Segunda técnica

Se basa en la relación entre fracción y división entera. Sabemos que en una fracción impropia la división del numerador por el denominador permite encontrar la parte entera de la fracción. Por tanto, dividiendo 17 entre 8 se obtiene como parte entera 2 y resto 1 lo que nos da el número mixto $2\frac{1}{8}$.

Para calcular cuántas décimas hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{8} = \frac{10}{80} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{8} = \frac{1}{10}(1 + \frac{2}{8}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{80}$$

y queda $\frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{80}$.

Para saber cuántas centésimas hay en 2/80 volvemos a utilizar el procedimiento anterior:

$$\frac{2}{80} = \frac{20}{800} = \frac{1}{100}\frac{20}{8} = \frac{1}{100}(2 + \frac{4}{8}) = \frac{2}{100} + \frac{4}{800}$$

y resulta $\frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{80} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{800}$.

Volviendo a hacer lo mismo con la fracción $\frac{4}{800}$ se obtiene:

$$\frac{4}{800}=\frac{40}{8000}=\frac{1}{1000}\cdot\frac{40}{8}=\frac{1}{1000}\cdot 5=\frac{5}{1000}$$

con lo que ya tenemos expresada la fracción inicial en forma decimal:

$$\frac{17}{8}=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{4}{800}=2+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000}=2'125$$

En el desarrollo anterior se produce una división entera entre el numerador y denominador de la fracción y sucesivamente se dividen los restos multiplicados por 10. Esto justifica una segunda técnica de obtención de la expresión decimal de un número decimal expresado como fracción consistente en efectuar la división entera entre numerador y denominador, colocar una coma en el cociente una vez que la división entera ha terminado, añadir un cero al resto y proseguir la división siguiendo este procedimiento hasta obtener resto 0. El cociente obtenido es la notación decimal correspondiente al número decimal.

$$\begin{array}{l|l}
17 & \underline{8\quad\quad} \\
\;10 & 2'125 \\
\;\;20 & \\
\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

La técnica pone de manifiesto una interpretación del número decimal como cociente exacto de dos números enteros: el numerador y el denominador de una fracción. A la técnica de dividir consistente en añadir ceros a los restos para seguir dividiendo se le llama 'división decimal'.

3.2. Expresión decimal de números racionales no decimales. Expresiones decimales periódicas

Si aplicamos la técnica anterior a números racionales no decimales obtendremos sucesivamente la parte entera, décimas, centésimas, milésimas, etc., correspondientes a la fracción usada como representante.

Con los números racionales no decimales nunca se obtiene resto cero, por lo que la división podría proseguir indefinidamente. Pero como los restos tienen que ser menores que el divisor, sólo existen un número finito de restos diferentes.

Por tanto, en algún momento habrá de repetirse un resto. A partir de ahí, una parte de la división se repetirá. Esto produce un cociente en el que la parte situada a la derecha de la coma se compone de infinitas cifras algunas de las cuales se repiten indefinidamente.

Ejemplo, si dividimos el numerador por el denominador en la fracción 2/11 se obtiene:

$$\begin{array}{l|l}
20 & \underline{11\quad\quad} \\
\;90 & 0'1818 \\
\;\;20 & \\
\;\;\;90 & \\
\;\;\;\;2 &
\end{array}$$

si seguimos dividiendo, las cifras 18 se repetirán indefinidamente dando lugar a un cociente con infinitas cifras, 0'18181818181818 ...

Al conjunto de cifras que se repiten se le llama *'periodo'* y al cociente de la división *'expresión periódica'*. Dada la imposibilidad de escribir infinitas cifras, las expresiones decimales periódicas se notan escribiendo la parte no periódica y a continuación el periodo con un pequeño arco encima, en el ejemplo anterior $0'\overset{\frown}{18}$.

En una expresión decimal periódica, que corresponde a un racional no decimal, y al igual que en los números decimales, la parte situada a la izquierda de la coma se llama 'parte entera' y la parte situada a la derecha 'parte decimal'.

La representación en un sistema posicional decimal de los números racionales no decimales es siempre periódica. Aunque estos números no son números decimales, podemos obtener números decimales que se aproximen a ellos tanto como queramos.

Ejemplo: el número decimal 0'181 se diferencia del número no decimal $0'\overset{\frown}{18}$ en menos de una milésima. Si esta aproximación no es suficiente, podemos elegir, por ejemplo, el número decimal 0'181818 que se diferencia de $0'\overset{\frown}{18}$ en menos de una millonésima, etc.

Es decir, la representación decimal de un racional no decimal es periódica, pero podemos encontrar un número decimal que represente dicho racional con una cota de error tan pequeña como queramos. Es esta última propiedad la que permite sustituir los cálculos con racionales por cálculos aproximados con números decimales.

3.3. Expresiones decimales periódicas puras y mixtas. Fracción generatriz de los racionales representados por estas expresiones

Cuando la parte decimal de una expresión decimal periódica consiste únicamente en la repetición indefinida del periodo, la expresión decimal se llama '*periódica pura'*. Si además existe una parte no periódica se dice que la expresión decimal es '*periódica mixta'*.

Ejemplo: 0'181818... es una expresión decimal periódica pura.
0'43181818... es una expresión decimal periódica mixta.

Llamamos *fracción generatriz* de una expresión decimal la fracción que la genera, es decir, aquella fracción tal que dividido el numerador por el denominador, da lugar a la expresión dada.

- Para hallar la *fracción generatriz de una expresión decimal finita* (que representa por tanto un número decimal), bastará tomar una fracción cuyo numerador es la expresión decimal del número sin la coma y cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

  Ejemplo: la fracción generatriz del número decimal 23'76 es $\frac{2376}{100}$

- Para hallar la *fracción generatriz de un número cuya expresión decimal es periódica* se multiplica el número por potencias de diez elegidas de tal forma que al restar dos de esas expresiones la parte decimal desaparezca. De ahí se obtiene el valor del número como cociente de enteros.

  Ejemplo 1. Supongamos que queremos encontrar la fracción generatriz de $23'\widehat{102}$. Sea x = $23'\widehat{102}$. Multiplicando x por 1000 obtendremos otro número con la misma parte decimal que x, $1000x = 23102'\widehat{102}$. Restamos las dos expresiones, se obtiene: 1000x –x= $23102'\widehat{102} - 23'\widehat{102}$

  999x = 23079, de donde se deduce que $x = \frac{23079}{999} = \frac{7693}{333}$ y, por consiguiente, $23'\widehat{102} = \frac{7693}{333}$.

  Ejemplo 2: Si queremos hallar la fracción generatriz del número cuya expresión es periódica mixta $2'67\widehat{5}$. Sea x el número. Multiplicando x por 1000 y por 100 para obtener dos números con la misma parte decimal, obtenemos 1000x = $2'67\widehat{5}$; $100x = 267'\widehat{5}$. Restando se obtiene 900x = 2408, es decir, $x = \frac{2408}{900} = \frac{602}{225}$, con lo cual $2'67\widehat{5} = \frac{602}{225}$.

Observaciones:

1. Los números decimales, como por ejemplo 3/4, que tienen una expresión decimal finita 0’75, se pueden representar también con expresiones decimales periódicas: basta escribir una serie ilimitada de ceros después del 5, 0’7500000 ... También podemos comprobar que se pueden representar como 074999...

2. Incluso los números naturales se pueden expresar con una notación decimal con infinitas cifras decimales; por ejemplo, 1=0’9999...

3. En la práctica, no obstante, los números decimales se expresan de la forma más simple posible, es decir con un número finito de cifras decimales.

4. En cambio todo número racional que no sea decimal, requiere un número ilimitado de cifras en su expresión decimal, que se repetirán en períodos (puros o mixtos).

Todo número racional tiene una representación decimal finita o periódica; todos los números cuya expresión decimal es finita o periódica son números racionales.

5. Más adelante veremos que también se usan “expresiones decimales no periódicas” para los números irracionales (por ejemplo, π = 3'14159 ...)

6. Una desventaja teórica de la expresión decimal es que no es única para los números decimales. Por ejemplo: 2’6 = 2’5999... Los cálculos con números decimales se operan de manera ventajosa si se usa las expresiones decimales finitas.

7. La expresión decimal de los racionales no decimales sí es única, pero las notaciones periódicas para los racionales no decimales son incómodas para operar con ellas o incluso imposibles de realizar.

Ejercicios:

1. Decir si los siguientes racionales son decimales. Para los casos en que sean decimales expresarlos en escritura decimal. Cuando no lo sean dar una aproximación decimal indicando el periodo correspondiente:
28/625; 38/64; 321/600; 36/675; 3/6250; 118/925; 52794/875

2. a) Encontrar una escritura decimal para los siguientes números racionales.
1/13, 1/19, 1/23 1/29, 1/31, 1/37, 1/41
b) ¿Cuál es el período en cada caso?
c) ¿Qué tienen en común los denominadores?

3. Escribir en notación decimal en base 12 el racional $\frac{4712_{(10}}{144_{(10}}$.

4. Representar mediante una fracción irreducible los racionales decimales siguientes:
1’04; 2’581; 0’0372; 10^{-5}; 0’0005

5. Representar mediante una fracción irreducible los racionales no decimales siguientes:
0’333...; 0’00666...; 0’123123...; 123’458888...; 0’346666...

4. LA INTRODUCCIÓN DE LOS DECIMALES A PARTIR DE LA MEDIDA[4]

Los números decimales se introducen habitualmente a partir de las medidas con diferentes unidades –generalmente de longitud: metros, decímetros, centímetros, milímetros. Los múltiplos y submútiplos de la unidad elegida, por ejemplo, el metro (m), se representan en forma decimal, insistiendo en las multiplicaciones o divisiones por 10 que relacionan unos con otros. La “expresión decimal” aparece como un medio cómodo de representar medidas complejas.

Ejemplo: “2 dam, 3 m, 1dm y 3 cm”, se conviene en expresarlo como 23’13 m si se ha elegido el metro como unidad principal, mientras que se escribe como 231’3 cm si se elige el centímetro.

Esta introducción sólo requiere nociones con las que los niños están familiarizados, como cantidades de longitud y sus distintas unidades de medida. Permite también plantear el problema de los ceros necesarios y los que no lo son, una de las primeras diferencias entre los enteros y los decimales.

Los ceros a la izquierda de un número entero se pueden suprimir (04 = 4), pero son indispensables si están a la derecha de la coma, ya que indican el rango de las restantes cifras en la escritura de un decimal (indican el orden de los submúltiplos de la unidad).

Ejemplo: 8 cm se expresan en metros como 0’08 m, o como 0’00008 km.

[4] Maurin y Johsua (1993), pags. 154-56.

Esta regla es inversa de la que rige para los enteros; en ellos los ceros de la derecha son los que indican el rango de las cifras no nulas, y no se pueden suprimir: 60 y 600 no representan el mismo entero, 0'6 y 0'60 o 0'600 sí representan el mismo decimal.

La introducción de los números decimales en el contexto de la medida tiene el inconveniente de presentar los decimales como números que *podrían ser enteros siempre que se tome una unidad suficientemente pequeña*. Esto enmascara una de las diferencias esenciales entre los enteros y los decimales, que es precisamente la principal utilidad de los decimales: la propiedad de que el conjunto D de los decimales es denso, o sea, que

> entre dos números decimales distintos, siempre se puede encontrar otro decimal distinto y, por tanto, existen una infinidad de tales números decimales intermedios.

El desconocimiento por parte de los niños de esta propiedad puede explicar las dificultades que tienen para proponer números comprendidos entre dos decimales.

Ejemplo: Los niños pueden proponer 1'215 como número decimal comprendido entre 1'21 y 1'22 si interpretan estos números como medidas expresadas en centímetros (1'215 supone pensar en términos de milímetros). Pero tendrán dificultades para proponer otro número entre 1'215 y 1'216, ya que no conocen unidades inferiores al milímetro. Desligando los números decimales del contexto de medida resulta fácil encontrar números entre 1'215 y 1'216: basta escribir 1'215 y 1'216 como 1'21500 y 1'21600 para encontrar rápidamente 99 números intermedios.

La propiedad de la densidad del conjunto de los números decimales D atribuye a estos números otras características importantes y diferentes respecto de los números enteros:

- Dado un decimal, no existe otro que le preceda o que le siga.
- Tampoco existe en un intervalo abierto (5, 6) un número decimal menor o mayor que todos los comprendidos en dicho intervalo.

Otro *obstáculo* en la comprensión de la representación decimal nace de la manera en la que se habla de ella: primero se pronuncia la parte entera y después la parte decimal. Por ejemplo, 256'431 se pronuncia como "doscientos cincuenta y seis, coma, cuatrocientos treinta y uno"; o también, "doscientos cincuenta y seis unidades, cuatrocientos treinta y un milímetro". Esta práctica lleva a pensar en la representación decimal como dos números enteros separados por una coma, lo que puede explicar ciertos errores en la comparación de números expresados en forma decimal.

- Cuando se quieren comparar dos números decimales la comparación de las partes enteras proporciona un método eficaz y correcto cuando las partes enteras son diferentes. Por ejemplo, 247 "y algo más" es mayor que 246 "y algo más".
- Si las partes enteras son iguales se corre el riesgo de aplicar este mismo procedimiento para comparar las partes decimales, lo que no es en general correcto. Así 247'5 es mayor que 247'123, a pesar de que 5 es menor que 123.
- La aplicación del "orden lexicográfico" en la comparación de enteros y decimales requiere que los números tengan las mismas cifras, lo que en el caso de los

decimales se logra completando con ceros. Así, para la comparación de 247'5 y 247'123 debe hacerse expresando 247'5 como 247'500; de este modo se ve claramente que 500 > 123.

A pesar de estas dificultades, la comparación de racionales expresados mediante notación decimal es más sencilla que usando la notación con fracciones.

5. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

El gran interés de la notación decimal se deriva de que todos los algoritmos desarrollados para realizar las operaciones aritméticas se extienden casi sin problema al conjunto D de los decimales. Esto es posible gracias a las propiedades del sistema de numeración decimal.

5.1. Adición y sustracción

El procedimiento consiste en transformar los dos números decimales para que tengan el mismo número de cifras después de la coma, añadiendo ceros a la derecha del número que tenga la parte decimal más corta. De esta manera, si se disponen los dos números en columnas, la coma debajo de la coma, sólo queda aplicar el algoritmo habitual de la adicción o de la sustracción en N. De esta regla puede surgir el obstáculo de considerar los decimales como "dos enteros separados por la coma",

Ejemplo:

$$205'8 \pm 174'402 = 205'800 \pm 174'402 \,,$$

y se aplica el algoritmo como para dos números enteros de seis cifras. Se comienza por la última cifra de la derecha de la parte decimal, y se deja la coma en su lugar entre la tercera y la cuarta columna.

La justificación de esta manera de proceder se puede hacer pasando los decimales a las fracciones correspondientes.

5.2. Multiplicación

El procedimiento consiste en realizar la multiplicación de los dos números como si fueran enteros, prescindiendo de la coma, para colocar finalmente la coma en el producto contando (a partir de la derecha) el número de cifras igual a la suma de las cifras de las partes decimales de los dos factores.

La realización de estos cálculos muestra a los niños que "la multiplicación no siempre hace aumentar" a los números, por ejemplo: 5'3 . 0'2 = 1'06

La justificación de este modo de operar la proporciona el sistema de numeración decimal:

$$5'3 = 5 + 3.10^{-1}$$
$$0'2 = 2.10^{-1}$$
$$5'3 \,.\, 0'2 = [5 + 3.10^{-1}].\,[2.10^{-1}] = 10.\,10^{-1} + 6.\,10^{-2} = 1'06$$

Se ha aplicado la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, la fórmula del producto de dos potencias de igual base y la escritura polinómica de los decimales.

Se puede justificar este algoritmo sin utilizar las operaciones con exponentes negativos. En primer lugar, es necesario aprender a multiplicar y dividir por potencias de la base 10. Se observará especialmente las consecuencias de estas operaciones sobre el desplazamiento de la coma.

A continuación es necesario aprender a escribir los números decimales como fracciones o divisiones (si antes no se han introducido los racionales):

5’3 = 53/10; o bien, 5’3 =53:10 =53.0’1

Esto equivale a explicitar la idea de que multiplicar por 0’1 es como dividir por diez. Finalmente es necesario recordar la definición del producto para mostrar que una décima por una décima da como resultado una centésima –propiedad que se habrá tratado antes, si ya se han abordado los racionales.

Después de esto se podrá escribir:

5’3 x 0’2 = (53 x 0’1) x (2 x 0’1) = (53 x 2) x (0’1 x 0’1) = 106 x 0’01

5.3. División

La división de dos decimales se puede reducir siempre a la de un dividendo decimal y un divisor entero, ya que si el divisor tuviera decimales se puede transformar en entero multiplicando por la potencia de diez conveniente ambos números.

El algoritmo que se aplica es el mismo que el de la división entera. Se traslada la coma al cociente cuando se la encuentra en el dividendo. Cuando se agotan las cifras del dividendo se continúa la división “bajando ceros” ¿Cuándo se debe detener este proceso? Esto plantea el problema de la aproximación decimal.

Ejercicios:

6. Calcular la diferencia, $1'\underline{53}$- $0'\underline{716}$.

6. Calcular los productos:
 a) $0'\underline{93}$ x 0’4 b) $0'\underline{495}$ x 0’

8. Sumar $0'\underline{6}$ + $0'\underline{3}$. ¿La suma de dos números decimales periódicos, es siempre un decimal periódico?

9. Estima el producto $7.123 x 10^5$ x $2.124 x 10^5$ y comprueba la respuesta con tres cifras significativas usando una calculadora.

6. LA APROXIMACIÓN DECIMAL DE RACIONALES. NÚMEROS REALES

Los racionales decimales admiten una expresión decimal finita. Basta realizar la división del numerador por el denominador de la fracción irreducible que lo representa para obtenerla. Si el racional no es decimal admite una expresión decimal, pero tenemos que utilizar una serie ilimitada de números (2/3 = 0’6666...) a la derecha de la coma, números que se repiten a partir de un cierto momento.

El hecho que hace a los números decimales útiles es que permiten “aproximar” con el grado de precisión que deseemos a cualquier número racional. Para ello basta truncar la serie ilimitada de la expresión decimal periódica en un punto más o menos alejado a la derecha de la coma; de este modo se obtiene un decimal finito que aproxima al decimal infinito cuanto queramos.

Desde un punto de vista práctico, por tanto, se puede evitar siempre el uso de expresiones decimales infinitas realizando los cálculos con aproximaciones decimales finitas. Esta propiedad se expresa diciendo que D es denso en Q:

> Hay un número decimal tan próximo como se quiera a cualquier número racional

Ejercicios*:*

10. Encontrar un decimal con dos cifras decimales que esté a menos de una centésima del número 1/3

11. Encontrar un decimal con tres cifras decimales que difiera de 15/7 menos de una milésima. Expresar el resultado en forma polinómica.

Números irracionales:

Existen números cuya expresión decimal es infinita y no periódica. Por ejemplo, imaginemos la siguiente expresión decimal potencialmente infinita:

0’717117111711117 ...

donde, después de cada número 7, se va poniendo sucesivamente un número 1 adicional. Por tanto, no será posible encontrar aquí ninguna periodicidad.

Es decir, podríamos imaginar la siguiente sucesión de números decimales finitos, ordenados de menor a mayor:

0’7 < 0‘71< 0’717 < 0’7171<0’71711< ...

Esta sucesión no crece ilimitadamente, ya que está acotada por 0’72. Por otra parte, por muchos términos que escribamos no podemos encontrar un racional al que corresponda la expresión, ya que ni es finita ni periódica.

> Llamamos *números irracionales* a aquellos cuya representación decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Por tanto un *número irracional* surge como resultado de continuar potencialmente una sucesión acotada de números decimales.

Como vemos en este ejemplo, los números decimales permiten también manejar aproximaciones finitas, con el grado de aproximación que deseemos, de los números irracionales.

Llamaremos conjunto de *números reales* al conjunto que se obtiene al unir los números *racionales e irracionales*.

> “*Número real*” es una manera abreviada de referirnos a las sucesiones estrictamente crecientes o decrecientes acotadas de números decimales.

Ejercicios:

12. Entre dos números reales cualesquiera hay un número decimal finito (D es denso en R). Encontrar un número decimal finito entre los siguientes números reales:
 a) π y $\sqrt{10}$b) $\sqrt{99}$ y $\sqrt{100}$

13. Probar que la escritura decimal siguiente no corresponde a un número racional:
 0’1234567891011121314151617181920 21.....

7. NOTACIÓN CIENTÍFICA. REPRESENTACIÓN DECIMAL EN LAS CALCULADORAS

Cualquier número expresado en forma decimal se puede escribir como producto de un número comprendido entre 1 y 10 y una potencia entera de 10. Por ejemplo:

$$2305 = 2'305.10^{3};0'0321 = 3'21.10^{-2}; \qquad 7'4 = 7'4.10^{0};$$

Esta manera de escribir los números se conoce como notación científica, o también *coma flotante normalizada.* La forma general es: $d.10^{n}$, siendo *d* un número decimal comprendido entre 1 y 10, y *n* la potencia necesaria para situar la coma en el lugar que corresponda según el número representado.

Es particularmente conveniente para expresar números muy grandes o muy pequeños, y es la utilizada en las calculadoras un poco sofisticadas (calculadoras científicas). Basta sólo mostrar en la pantalla el número *d* y el exponente *n*, ya que la base 10 de la potencia se sobreentiende.

Ejemplos:
$-542'2568 = -5'422568.\ 10^{2}$, se muestra como, -5’422568 02
$0'000005689 = 5'689.10^{-6}$, se muestra como, 5’689 -06

El uso de la notación científica en las calculadoras es una necesidad derivada del hecho que las pantallas de estos dispositivos sólo pueden mostrar un número pequeño de dígitos (8 o 10 cifras, por lo general). Sin estos convenios de representación sería imposible hacer el siguiente cálculo:
0’000 000 005 872 x 0’000 000 000 025 8
ya que daría como resultado 0’00000000 en una calculadora con 10 posiciones de memoria en la pantalla.
Sin embargo, en notación científica el resultado se daría como:
1’514976 -19, que significa,
$1'514976 \times 10\text{-}^{19} = 0'000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 151\ 497\ 6$
lo que permite dar todas las cifras significativas del cálculo.

Conviene tener en cuenta que en las calculadoras la coma decimal se indica con un punto, y no con una coma o con un apostrofe (') como suele ser habitual en la escritura a mano.

Ejercicios

14. Efectuar los siguientes cálculos sin calculadora. Comprobar los resultados usando la calculadora.

a) 0'85 + 0'2;	b) 0'002 + 0'32 +1'5;	c) 6'801 - 0'999;
d) 2'8 x 0'49;	e) 0'003 x 0'002;	f) 0'0'48 ÷ 6
g) 0'048 ÷ 0'6;	h) 0'048 ÷ 0'06;	I) 0'048 ÷ 0'000006
j) 0'22459 ÷ 0'037	k) 0'015989 ÷5'9	

Buscar situaciones concretas en las que sea necesario hacer cada una de estas operaciones.

15. Una calculadora da el valor 0'0000001 como respuesta para la multiplicación 0'00037 x 0'00054.

a) ¿Cuál es la respuesta correcta?
b) ¿Cómo se puede hallar la respuesta correcta con la calculadora?
c) Otra calculadora da como respuesta 1998 -07. Interpretar esta respuesta.

8. TALLER MATEMÁTICO

1. Escribir en forma simplificada como "número con coma" las siguientes expresiones de dos números expresados de forma polinómica en base b >6. ¿Cuál de ellos es mayor?

$$d_1 = 2b^2 + 0b^1 + 1b^0 + 5b^{-1} + 1b^{-2} + 6b^{-4}$$
$$d_2 = 2b^2 + 0b^1 + 1b^0 + 5b^{-1} + 6b^{-3}$$

2. Dar la escritura decimal, eventualmente aproximada, de los números que se escriben del siguiente modo:

214'23 (en base cinco) y 214'23 (en base seis)

3. Si escribimos los números racionales en un sistema de base 12,
a) ¿Qué fracciones podrán escribirse con una escritura "duodecimal" finita?
b) ¿Qué fracciones tendrán una escritura "duodecimal" ilimitada periódica?
c) ¿Qué fracciones tendrán una escritura duodecimal ilimitada no periódica?

4. Si al usar la calculadora para dividir 4 entre 9 obtienes como resultado 0.4444444, ¿significa eso que 4/9 es un número racional con expresión decimal periódica?

5. Escribe las siguientes fracciones en expresión decimal:
1/11
1/111
1/1111
¿Puedes adivinar la expresión decimal de 1/11111? Comprueba tu conjetura hallando su fracción generatriz.
Describe la expresión decimal de 1/N donde N el un número formado por n unos: 111…..1

6. ¿Cuáles son las fracciones generatrices de las siguientes expresiones?
0'7474747474...
0'235235235235...
0'ababababab...
0'abcabcabc...

BIBLIOGRAFÍA

Briand, J. y Chevalier, M-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è^{re} année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Castro, E. (2001). Números decimales. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.315-343). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. Paris: Editions Marketing (Ellipses).

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 297-318). Universidad de la Laguna.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

I.

SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 6:

NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

A: Contextualización Profesional

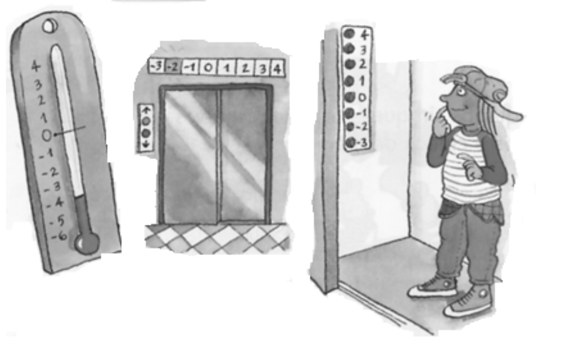
ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1. Resuelve los problemas propuestos.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4. Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6. Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. • ¿Qué temperatura marca el termómetro? • ¿En qué planta está el ascensor? • ¿Qué botón hay que pulsar para bajar al tercer sótano?	

2. Escribe con números negativos:
   - Siete grados bajo cero.
   - El coche está en el segundo sótano.
   - Nació el año 73 a. C.
   - Veinte metros bajo el nivel del mar.

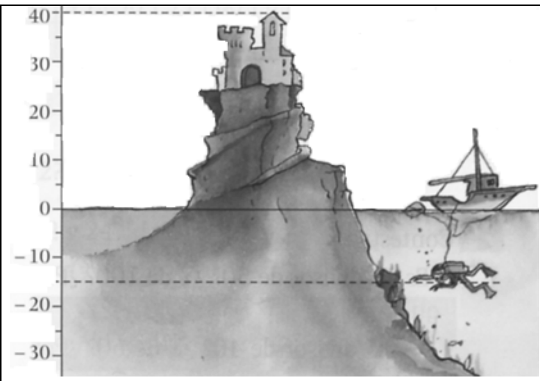
3. Hace una hora el termómetro marcaba 2 ºC. Si la temperatura ha descendido 7 ºC, ¿qué temperatura marca a hora el termómetro?

4. ¿Cuántas plantas hay entre el tercer sótano y el cuarto piso?

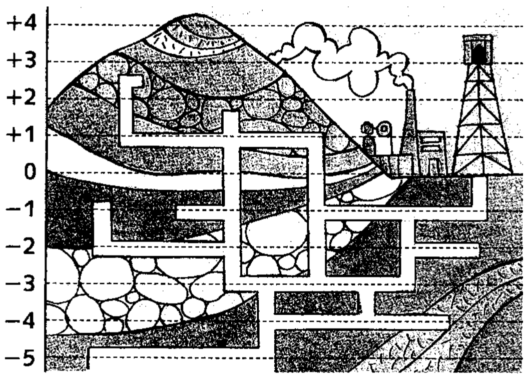
5. ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre -2 ºC y 3 ºC?

6. Fíjate en el dibujo y contesta:

- ¿A qué altura está el castillo
- ¿A qué profundidad se encuentra el buzo?



7. Ayúdate del esquema de esta mina y completa.

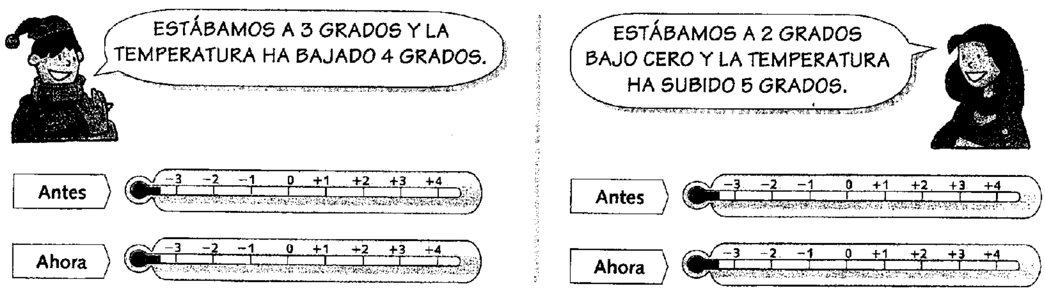


- Estaba en el nivel +1 y subí un nivel. Ahora estoy en el nivel ...
- Estaba en el nivel +2 y bajé cinco niveles. Ahora estoy en el nivel ....
- Estaba en el nivel –3 y subí cuatro niveles. Ahora estoy en el nivel ...
- Estaba en el nivel –1 y bajé dos niveles. Ahora estoy en el nivel ...

Contesta.

- Juanjo estaba en el nivel –1 y ha subido. ¿En qué niveles puede estar Juanjo.
- Ana estaba en el nivel 0 y ha bajado. ¿En qué niveles puede estar Ana?
- Pedro estaba en el nivel –1 y ha bajado más de un nivel. ¿En qué niveles puede estar Pedro?

8. Dibuja, en cada caso, los termómetros que marquen la temperatura indicada.

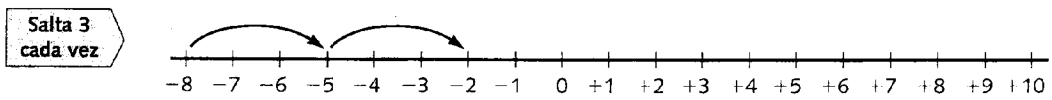


9. En cada caso, dibuja un termómetro, marca la temperatura y contexta.

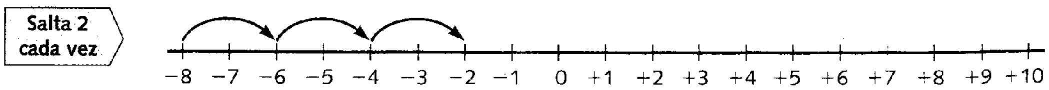
- Hoy a las 10 de la mañana el termómetro marcaba +8º. Dos horas después la temperatura subió 5º y 7 horas después la temperatura bajó 9º. ¿Qué temperatura marcará el termómetro a las 7 de la tarde?

- Ayer a las 8 de la mañana el termómetro marcaba –2º. Tres horas después la temperatura subió 4º y 8 horas después la temperatura bajó 10º. ¿Qué temperatura marcará el termómetro a las 7 horas de la tarde?

10. Completa las siguientes series.



Números de la serie: −8, −5, …



11. Piensa y escribe.
- Cinco números enteros mayores que –3.
- Cinco números enteros menores que –8.
- Cinco números enteros mayores que –5 y menores que +5.
- Cinco números enteros mayores que –9 y menores que +9.

12. Escribe *mayor* o *menor*, según corresponda.
- Cualquier número entero positivo es .... que 0.
- Cualquier número entero negativo es .... que 0.
- Un número entero positivo es ...... que cualquier número entero negativo.

13. Utiliza un papel cuadriculado y traza de rojo unos ejes perpendiculares. Después dibuja los polígonos que se indican.
- Un triángulo cuyos vértices son los puntos (+1, +1); (-2,+1) y (-1, +2).
- Un cuadrilátero cuyos vértices son los puntos (+1, +2); (-3, +1); (-2, -2) y (+3, +1).
- Un pentágono cuyos vértices son los puntos (+4, +1); (-3, 0); (-1, -1); (+2, +3) y (+5, -2).

14. Dibuja en una cuadrícula los caminos que pasan por los puntos indicados.

Camino rojo: (-3, +1), (-2, +1), (-1, +1), (+3, +2)
Camino verde: (+1, -2), (+1, -1), (0, -1), (-2, -2)
Camino azul: (-1, +1), (+1, 0), (+2, -1), (+2, +3)
Camino amarillo: (+5, -1), (+3, -2), (0, -3), (-2, -2)

Observa los caminos dibujados y contesta:
- ¿Qué caminos pasan por el punto (-1, +1)?
- ¿Qué caminos pasan por el punto (-2, -2)?

B: Conocimientos Matemáticos

1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores hemos presentado los números naturales, fraccionarios y decimales como medio de expresión del tamaño o numerosidad de los conjuntos finitos, del lugar que ocupa un elemento dentro de un conjunto ordenado y de la medida de diferentes cantidades de magnitud. Además, entre dichos números se definen las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división entera (también las de potenciación y radicación) que se corresponden con cierto tipo de acciones que hacemos sobre las cantidades de magnitudes: agrupar, separar, reiterar, repartir, etc. Hasta ahora, la invención de los números se justifica y motiva inicialmente como respuesta a estas necesidades de descripción y manipulación de ciertas situaciones de tipo empírico. Por esta razón, el estudio de los números naturales, fraccionarios y decimales y de sus operaciones se apoya sobre situaciones concretas que proporcionan ejemplos de la estructura formal a la que en última instancia se reducen.

Ahora bien, es importante resaltar que los objetos matemáticos, una vez inventados y fijadas unas primeras relaciones entre ellos, adquieren una "vida propia" y plantean nuevos problemas internos, distintos de los problemas empíricos que motivaron su introducción. Como respuesta se inventan nuevos objetos matemáticos que son conectados de manera consistente con todo el sistema ya construido. A medida que progresamos en el estudio de las matemáticas nos vamos encontrando con objetos más complejos que son inventados o construidos respondiendo a necesidades internas de la propia matemática. Y así sucede con los números con signo -positivos y negativos-, cuya construcción se debe, no tanto a la necesidad de modelizar matemáticamente situaciones del mundo sensible, como a la problemática que plantea el desarrollo de una rama de las matemáticas: *el álgebra*. Es en el entorno del álgebra donde aparecen las condiciones que hacen posible y deseable la introducción de los números con signo. Por tanto, antes de hablar de las situaciones que motivan el uso de los números positivos y negativos necesitamos comentar algunas de las características del ámbito algebraico.

2. OTRA MANERA DE RESOLVER LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS: EL MÉTODO ALGEBRAICO

2.1. Características del método algebraico de resolución de problemas aritméticos

Un problema aritmético se caracteriza porque tanto los datos como las incógnitas son números y las relaciones entre unos y otras pueden expresarse en términos de operaciones aritméticas. El método aritmético de resolución de estos problemas, del que ya hemos hablado en capítulos anteriores, consiste en construir una secuencia de operaciones que ligue los datos numéricos conocidos hasta obtener las incógnitas buscadas. Para establecer cada paso de la secuencia hay que tener en cuenta el contexto definido en el enunciado del problema.

Así, por ejemplo, la resolución del problema siguiente:

En un taller de confección disponen de 3 piezas de tela de 50 m. cada una. Con ellas van a confeccionar 30 trajes que necesitan 3 m. de tela cada uno. Con el resto de la tela piensan hacer abrigos que necesitan 4 m. de tela cada uno. ¿Cuántos abrigos pueden hacerse?

exige la secuencia de operaciones aritméticas que detallamos a continuación:

3 x 50 = 150 m. de tela disponible
30 x 3 = 90 m. de tela empleada en trajes
150 – 90 = 60 m. de tela sobrante
60 : 4 = 15 abrigos pueden hacerse.

Como puede verse, el método aritmético consiste en analizar el contexto para determinar una primera operación entre dos datos que da como resultado otro dato, anteriormente desconocido, que nos acerca a las incógnitas buscadas. La repetición de este proceso el número de veces que haga falta nos permite encontrar la solución del problema. Para ello es necesario estar en todo momento pendientes del contexto, pues la decisión sobre cuál es la operación siguiente a efectuar depende totalmente del significado de los datos numéricos.

Ahora bien, existe otro método de resolución de problemas aritméticos que funciona de manera muy distinta: el método algebraico. Consiste dicho método en indicar operaciones entre las cantidades citadas en el enunciado del problema, sin distinguir entre cantidades conocidas y desconocidas (representando estas últimas por medio de letras), hasta encontrar una nueva cantidad que pueda expresarse de dos maneras diferentes en función de los datos y las incógnitas, lo que permite establecer una relación de igualdad entre esas expresiones. Una vez establecidas una o varias igualdades, se procede a sustituirlas por igualdades equivalentes hasta llegar a una que contenga en uno de sus miembros una de las incógnitas y en el otro, una cantidad conocida.

El siguiente problema y su solución ilustran bien las características del método algebraico:

En un corral hay gallinas y conejos. Hay 35 animales en total. Entre todos tienen 108 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

- Para solucionarlo, llamamos x a una de las cantidades desconocidas: el número de gallinas, y la tratamos como si fuese conocida. En esas condiciones, el número de conejos será 35 – x. Como las gallinas tienen 2 patas y los conejos 4, tenemos que 2x y 4(35 – x) representan, respectivamente, el número de patas de gallina y de conejos. La suma 2x + 4(35 – x) nos dará el número total de patas que hay en el corral. Pero por otro lado sabemos que son 108 patas, lo que nos permite escribir la igualdad[1] 2x + 4(35 – x) = 108.

Hasta aquí se desarrolla la fase contextualizada de la resolución del problema. Para poder establecer la ecuación anterior hay que estar pendientes del significado de los números y letras que intervienen en ella, es decir, hay que mantener un control semántico sobre nuestras decisiones. Pero, a partir del momento en que la ecuación queda establecida, el proceso de resolución se descontextualiza: las transformaciones

[1] A esta igualdad se le llama 'ecuación' porque sólo es cierta para algunos valores particulares de la incógnita (en este caso, para un solo valor) a los que se les llama 'soluciones' de la ecuación.

que sufre la ecuación ya no dependen del significado de sus términos en el contexto del problema, sino de la interpretación correcta de unos códigos escritos y de una manipulación que respete las propiedades de las operaciones aritméticas y de las igualdades. Aparece, por tanto, una fase de resolución descontextualizada sobre la que se ejerce un control sintáctico, no semántico, cosa que no sucede en el método aritmético. Será como sigue:

- Eliminamos el paréntesis de la ecuación, 2x + 140 – 4x = 108, reducimos términos semejantes, 140 – 2x = 108, pasamos términos de un miembro a otro de la ecuación, 140 – 108 = 2x, 2x = 32, y, por último, dividimos la ecuación por 2, x = 16, y obtenemos el número 16 como solución de la ecuación inicial.

Durante la fase anterior no es necesario recurrir al significado que tienen los números y las letras en el enunciado del problema que nos ocupa, basta poner en juego unas reglas sintácticas, unas reglas de manipulación de ecuaciones o, más en general, de manipulación de escrituras algebraicas.

Finalmente, una vez obtenida una incógnita, hay que referirse de nuevo al contexto para darle significado y poder terminar diciendo que en el corral hay 16 gallinas y 19 conejos.

2.2. Las reglas de prioridad en las operaciones combinadas

La necesidad, propia del método algebraico, de expresar operaciones entre números y letras[2], así como de indicar simultáneamente una sucesión de operaciones a realizar, obliga a definir unos códigos escritos mucho más complejos que los usuales en aritmética. En ésta, todas las operaciones son efectuables y, por tanto, puede hacerse una detrás de otra de manera independiente, indicándolas por medio de la grafía del algoritmo correspondiente. La disposición de los cálculos es, básicamente, vertical: se escribe el algoritmo de una operación y debajo el de la siguiente. En cambio, en el cálculo algebraico nos encontramos con una escritura en horizontal en la que quedan trabadas distintas operaciones que a priori no se han efectuado. Además, durante la fase descontextualizada el control sobre la validez del cálculo algebraico no puede basarse en el significado que los números y letras tengan en el particular contexto en el que se trabaje. Todo esto obliga a establecer reglas muy precisas de lectura, escritura y manipulación de estas expresiones que en aritmética no son necesarias.

Por ejemplo, en la expresión 3 + 2·5, si se empieza sumando 3 + 2 y multiplicando después por 5, se obtiene 25, mientras que si se multiplica primero 2·5 y después se le suma 3, se obtiene 13. Esta duplicidad de resultados, y el hecho de no poder recurrir a un contexto para decidir qué operación conviene efectuar en primer lugar, obliga a ponerse de acuerdo sobre unas reglas de escritura que definan, sin ambigüedad posible, el orden en que deben realizarse las operaciones indicadas en la expresión algebraica[3]. Y así, se conviene que en la ejecución del cálculo 3 + 2·5 hay que entender que el producto tiene prioridad frente a la suma y que, por tanto, 3 + 2·5 = 3 + 10 = 13. Para

[2] Números (y letras que los representan) que de momento son naturales, fracciones de números naturales o raíces positivas de los anteriores, como corresponde a un álgebra que es una mera técnica de resolución de problemas aritméticos elementales, a un álgebra entendida como “aritmética generalizada”.

[3] Entendemos que 3 + 2·5 es una expresión algebraica porque, aun cuando no contiene letras y las dos operaciones que aparecen en ella son efectuables, la manera de presentarlas, como operaciones indicadas ligadas entre sí, es típica del método algebraico. En una resolución estrictamente aritmética, estas operaciones se presentarían por separado: primero el producto 2·5, después la suma, 3 + 10.

indicar a nuestro interlocutor que la suma debe efectuarse antes que el producto tendríamos que escribir (3 + 2)5, y entonces resultaría (3 + 2)5 = 5·5 = 25.

Las reglas de prioridad que se definen para la ejecución de las operaciones combinadas son las siguientes:

- En ausencia de paréntesis:

a) se realizan en primer lugar las raíces y potencias, después los productos y cocientes y, por último, las sumas y restas[4].

b) la realización de varias operaciones de un mismo rango[5] se hará de izquierda a derecha. Este orden podrá modificarse si existen propiedades de los números (propiedades aritméticas) que justifiquen el cambio.

- Si hay paréntesis:

a) la realización de los paréntesis es prioritaria, salvo que se eliminen o modifiquen de acuerdo con las propiedades aritméticas.

b) en el caso de paréntesis encajados tienen prioridad los interiores respecto a los exteriores.

Además, en la realización de los cálculos rige el siguiente principio de economía:

- A la hora de realizar operaciones combinadas se elegirá el camino más económico en cuanto al número de operaciones a realizar o al tamaño de los números intermedios obtenidos.

Por ejemplo, con la escritura siguiente:

$3 + 2(7 - 2^2) - 1$

queremos indicar que primero debe efectuarse la potencia $2^2 = 4$, después la resta contenida en el paréntesis, 7 – 4 = 3, a continuación, el producto de 2 por el número resultante del paréntesis, 2·3 = 6, después la suma, 3 + 6 = 9, y, por último, la resta, 9 – 1 = 8. En conclusión, $3 + 2(7 - 2^2) - 1 = 8$.

3. SITUACIONES QUE MOTIVAN EL USO DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

En las expresiones 3 + 2·5 ó $3 + 2(7 - 2^2) - 1$ todas las operaciones parciales son efectuables por lo que, siguiendo las reglas de prioridad de operaciones, obtenemos un número natural como resultado final de dichos cálculos. Pero podemos construir fácilmente expresiones algebraicas numéricas que no sean parcialmente efectuables. Por ejemplo, la expresión 10 + (3 – 5) propone un cálculo imposible en el ámbito de la aritmética, 3 – 5, porque “donde hay 3 objetos (ó 3 unidades de una cantidad de magnitud) no se pueden quitar 5”. Sin embargo, si utilizamos una propiedad de la aritmética que dice que “sumar una diferencia equivale a sumar el minuendo y restar el sustraendo” podemos transformar esa expresión en una equivalente, 10 + 3 – 5, compuesta por operaciones que ya son efectuables, 10 + 3 – 5 = 13 – 5 = 8, y dan como

[4] Esta regla afecta a los números o letras que estén ligados a otros dos números o letras por medio de operaciones de distinto rango. Por ejemplo, en la operación 2 + 3·5, el número 3 está ligado al 2 por una suma y al 5 por un producto, luego tiene prioridad el producto.

[5] Se considera que las raíces tienen el mismo rango que las potencias, los productos el mismo rango que los cocientes, y las sumas el mismo que las restas.

resultado un número natural. Otro ejemplo: si nos proponen el cálculo 371 + 452 – 453 lo más económico es pensar que "sumar 452 y restar 453 equivale a restar 1" ya que las 452 unidades que se suman se neutralizan con las 452 unidades que contiene el segundo número y que hay que restar. Por tanto, lo más sencillo es escribir 371 + 452 – 453 = 371 – 1 = 370. Sin embargo, esto significa que, de alguna manera, hemos efectuado una resta con un sustraendo mayor que el minuendo, lo que en aritmética no es admisible.

En resumen, la naturaleza del cálculo algebraico, incluso como mero instrumento de apoyo a la aritmética, desborda el marco aritmético y hace aparecer como deseable la prolongación de las operaciones a casos que la aritmética no contempla. En particular, la manipulación de restas (o diferencias) en las que el minuendo sea menor que el sustraendo. Y ¿cómo hacer esto? Pues sustituyendo el cálculo entre números (o letras que los representan)

- bien por un cálculo entre sumandos y sustraendos, es decir, entre números en los que, a la hora de operar, se tiene en cuenta su papel en la expresión algebraica en tanto que números que suman o restan a otros;

- bien por un cálculo entre diferencias, unas con minuendo mayor o igual que el sustraendo y otras con minuendo menor que el sustraendo.

Para ello, habrá que establecer las reglas de cálculo, no ya entre números, como veníamos haciendo hasta ahora, sino entre números precedidos de un signo + ó – que indica su condición de sumandos o sustraendos, o entre diferencias a-b, con a mayor, igual o menor que b. Y esto habrá que hacerlo de manera que dichas reglas sean compatibles con el cálculo entre números ya conocido de antemano, es decir, de forma que conserve las propiedades de las operaciones aritméticas, lo que se conoce como "principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética".

4. LAS REGLAS DE CÁLCULO DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

4.1. Las equivalencias entre sumandos y sustraendos, diferencias y números

Para toda diferencia con minuendo mayor o igual que el sustraendo podemos encontrar otras muchas que se comportan exactamente igual que ella: todas aquellas que dan el mismo resultado. Por ejemplo, en un cálculo podemos sustituir la diferencia 5-3 por la diferencia 8-6 sin que eso modifique el resultado final. Eso es debido a que en ambos casos la diferencia, una vez efectuada, es 2. Por eso se dice que esas dos diferencias son equivalentes. Pero 5-3 es equivalente a otras muchas diferencias, por ejemplo: 5-3 = 4-2 = 2-0 = 6-4 = 17-15 = ... Todas dan el mismo resultado y todas ellas se obtienen sumando o restando un mismo número al minuendo y el sustraendo. Pero además, también podemos sustituir cualquiera de ellas por el número natural 2, sabiendo que esto no va a afectar al resultado final de las operaciones.

Si extendemos estos razonamientos al caso de diferencias con minuendo menor que el sustraendo, en un primer momento nos encontramos con que aquí no podemos establecer una equivalencia entre diferencias basada en que al efectuarlas se obtiene el mismo resultado, porque estas diferencias ya no son efectuables en el ámbito de los números sin signo. Por ejemplo, la diferencia 3-5 no tiene solución en los números naturales. Sin embargo, lo que sí podemos hacer es establecer la equivalencia entre dos diferencias cuando una de ellas se obtiene sumando un mismo número a minuendo y sustraendo de la otra. De esa manera podemos considerar como equivalentes las diferencias 3-5 = 1-3 = 0-2 = 4-6 = 28-30 = ..., aun cuando no sean efectuables en N. Además, cualquier diferencia con minuendo menor que el sustraendo siempre tendrá como equivalente una diferencia del tipo 0-a, lo que en la práctica es un sustraendo. Por tanto, toda diferencia con minuendo menor que el sustraendo es equivalente a un sustraendo.

Por otro lado, cuando se desarrollan las reglas de cálculo de los sumandos se comprueba que en todo momento se comportan como los números sin signo, por lo que se les puede considerar equivalentes. En resumen, la familiarización con el cálculo con sumandos y sustraendos y diferencias permite ver que, por una parte, el número sin signo n (natural o fraccionario), el sumando $+n$ y las diferencias con el minuendo mayor o igual que el sustraendo que dan como resultado n, son equivalentes entre sí ($+n = n$-0 $= n$); por otro lado, el sustraendo $-n$ es equivalente a la diferencia con el minuendo menor que el sustraendo 0-n y a todas las equivalentes a ella ($-n = 0-n$).

4.2. Adición y sustracción de números con signo

Supongamos que tenemos dos sumandos, por ejemplo, +3 y +2. Podemos representarlos por medio de diferencias equivalentes a ellos, por ejemplo, 3-0 y 2-0. Si tenemos en cuenta las reglas de la aritmética[6], la suma de estos dos sumandos o diferencias será:

$$(+3)+(+2) = (3-0)+(2-0) = (3+2)-(0+0) = 5-0 = +5$$

En el caso de que tengamos dos sustraendos, -3 y –2, podemos representarlos también en términos de diferencias, 0-3 y 0-2. Si extendemos la regla de suma de diferencias a este caso, obtendremos:

$$(-3)+(-2) = (0-3) +(0-2)= (0+0)-(3+2)= 0-5 =-5$$

Y, por último, si tenemos un sustraendo y un sumando podemos establecer su suma del siguiente modo:

$$(+3)+(-2) = (3-0)+(0-2) = (3+0)-(0+2) = 3-2 = 1-0 = +1$$
$$(-3)+(+2) = (0-3)+(2-0) = (0+2)-(3+0) = 2-3 = 0-1 = -1$$

En la práctica, esto se traduce en la regla siguiente: *para sumar dos números con el mismo signo, se suman los números y se mantiene el signo; para sumar dos números con distinto signo, se restan los números y se pone el signo del número mayor.*

La suma entre números con signo, además de cumplir las propiedades asociativa y conmutativa, igual que la suma entre números, tiene la ventaja de que todo número con signo tiene un opuesto, es decir, otro número con signo que sumado con él da como resultado cero. La suma, $(+n)+(-n) = (n-0)+(0-n) = (n+0)-(0+n) = n-n = 0$, nos muestra que $+n$ es el opuesto de $-n$ y, recíprocamente, $-n$ es el opuesto de $+n$. Y esto tiene una consecuencia importante: la de que toda resta se puede expresar en términos de suma. En efecto, efectuar la sustracción $\beta-\alpha$, donde α y β representan números con signo

[6] En este caso, la regla que dice que "la suma de dos diferencias es otra diferencia cuyo minuendo es la suma de los minuendos y cuyo sustraendo es la suma de los sustraendos".

cualesquiera, equivale a encontrar la solución de la ecuación $x+\alpha = \beta$. Y aplicando las propiedades aritméticas[7], se tiene que

$$x+\alpha+op(\alpha) = \beta+op(\alpha), \quad x+0 = \beta+op(\alpha), \quad x = \beta+op(\alpha)$$

y, por tanto, $\beta-\alpha = \beta+op(\alpha)$. La consecuencia inmediata es que, en la práctica, las restas se reducen a sumas y lo que en los números naturales o fraccionarios se interpretaba como dos operaciones distintas, en los números con signo se convierte en una única operación. Esto facilita grandemente la manipulación de las expresiones algebraicas porque la suma es una operación que se comporta mucho mejor que la resta, dado que cumple las propiedades asociativa y conmutativa, lo que no sucede con esta última.

Ejercicio

1. Justificar las propiedades asociativa y conmutativa de la adición de números con signo, interpretándolos como diferencias de números.

4.3. Valencias y usos de los signos + y –

La aparición de los números con signo hace que los signos + y - adquieran nuevos significados o valencias. En el campo de la aritmética los signos + y - se usan para indicar las operaciones binarias de adición y sustracción entre números. En el ámbito algebraico, mantienen su sentido como indicadores de operaciones binarias, aunque ya no entre números, sino entre números con signo, pero aparece un nuevo sentido como signo predicativo, es decir, como signo que indica la cualidad de sumando o sustraendo de un número. Pero además, el hecho de que $\beta-\alpha = \beta+op(\alpha)$ hace deseable la interpretación de $-\alpha$ como el opuesto de α. Así pues, en la escritura algebraica los signos + y - pueden indicar:

a) la cualidad de sumandos o sustraendos de los números con signo (signos predicativos).
b) las operaciones binarias de suma y resta entre números con signo (signos operativos binarios).
c) la operación unaria que mantiene un número con signo o lo transforma en el opuesto (signos operativos unarios).

Sin embargo, la práctica habitual en la manipulación de las escrituras algebraicas pasa por la supresión de todos los signos operativos binarios, no sólo los que afectan a sumas y restas, también los que se refieren a productos y cocientes. Los signos que indican restas y cocientes no se usan porque estas operaciones se expresan en términos de suma con el opuesto o producto por el inverso, respectivamente; la suma se representa colocando los números con signo uno a continuación del otro (por ejemplo, –4-5+3 indica la suma de los términos -4 y -5 y +3) y el producto, colocando los términos uno a continuación del otro y envueltos en paréntesis (por ejemplo, (-4)(-5)(+3) indica el producto de los términos -4, -5 y +3).

[7] En este caso, la propiedad de que "si a los dos miembros de una igualdad se le suma o resta un mismo número, la igualdad se conserva".

La multiplicidad de significados de los signos + y - junto con la supresión de los signos operativos binarios permite una gran flexibilidad y comodidad de interpretación y manejo de las expresiones algebraicas. Por ejemplo, la expresión 10-5-8+5-10-4, entendida como suma de los términos +10 (hay costumbre de suprimir también el signo + en su sentido predicativo cuando afecta al primer término de una expresión o de un paréntesis), -5, -8, +5, -10 y –4, permite cambiar de lugar cualquiera de los términos y asociarlo en la forma que resulte más eficaz para obtener el resultado, puesto que la suma tiene las propiedades asociativa y conmutativa (10-5-8+5-10-4 = -8-4 = -12). Otro ejemplo: en la expresión 3a+(-5a+7-2b)-(8-b) los signos que preceden a los paréntesis deben interpretarse como signos operativos unarios: el primero de ellos, al ser un signo +, deja invariable el paréntesis, el segundo, al ser un signo -, indica que hay que transformar el paréntesis en su opuesto. Teniendo en cuenta que "el opuesto de una suma es la suma de sus opuestos[8]", podemos escribir 3a+(-5a+7-2b)-(8-b) = 3a-5a+7-2b-8+b. Como ahora se trata de una suma entre los términos +3a, -5a, +7, -2b, -8 y +b, podemos asociar y conmutar los términos en la forma que nos resulte más cómoda y obtenemos la expresión equivalente -2a-b-1.

4.4. Ordenación de números con signo

La ordenación de los números con signo viene dada por la necesidad de definir una relación de orden compatible con la suma. Esta compatibilidad exige que si a los dos miembros de una desigualdad se les suma un mismo número con signo, la desigualdad se conserve. Si tenemos en cuenta las siguientes desigualdades aritméticas: 8+3 < 8+5, 8-3 < 8+5 y 8-5 < 8-3, donde los signos + y - indican operaciones binarias entre números naturales o fraccionarios sin signo, vemos que todas ellas pueden reinterpretarse en términos de sumas entre números con signo sin más que considerar los signos + y - como predicativos. Si ahora sumamos a los dos miembros de las desigualdades el término –8 y exigimos que las desigualdades se conserven, se obtiene que +3 < +5, -3 < +5 y -5 < -3.

En general, la regla de ordenación de números con signo nos dice que: *-n < +m cualesquiera que sean n y m, +n < +m si n < m y -n < -m si n > m.*

4.5. Multiplicación y división de números con signo

Dados dos sumandos, por ejemplo, +3 y +2, siempre podremos representarlos por medio de diferencias equivalentes a ellos, por ejemplo, 3-0 y 2-0. Si tenemos en cuenta las reglas de la aritmética[9], la multiplicación de estos dos sumandos o diferencias puede expresarse como:

$$(+3)(+2) = (3-0)(2-0) = (3-0)2-(3-0)0 = 3.2-0.2-3.0+0.0 = 6-0 =+6$$

Si tenemos dos sustraendos, por ejemplo, -3 y -2, también podemos representarlos en términos de diferencias como, por ejemplo, 0-3 y 0-2. Si efectuamos ahora la multiplicación de esos dos sustraendos o diferencias, obtendremos:

[8] Esta propiedad se demuestra fácilmente porque (a+b)+(op(a)+op(b)) = a+b+op(b)+op(a) = a+ op(a) = 0. Esto nos hace ver que op(a)+op(b) es el término que sumado con a+b da cero. Por tanto, es el opuesto de a+b, op(a+b) = op(a)+op(b).

[9] En este caso, las propiedades asociativa y conmutativa del producto y la propiedad distributiva del producto respecto a la resta.

(-3) (-2) = (0-3)(0-2)= (0-3)0-(0-3)2 = 0.0-3.0-0.2+3.2 = 6-0 = +6

Por último, si tenemos un sumando y un sustraendo, por ejemplo, +3 y -2, podemos establecer su producto del siguiente modo:

(+3).(-2) = (3-0)(0-2) = (3-0)0-(3-0)2 = 3.0-0.0-3.2+0.2 = 0-6 = -6

En la práctica, esto se traduce en la regla siguiente: *para multiplicar dos números con el mismo signo, se multiplican los números y se coloca delante del resultado el signo +; para multiplicar dos números con distinto signo, se multiplican los números y se coloca delante del resultado el signo -.*

En cuanto a la división de números con signo, hay que tener en cuenta que, en el campo de los números fraccionarios, la división por un número distinto de cero se reduce a la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor, con lo que toda división entre fracciones se convierte en una multiplicación. De acuerdo con esto, a la división de números con signo le son de aplicación las reglas establecidas para la multiplicación de números con signo: *para dividir dos números con el mismo signo, se dividen los números y se coloca delante del resultado el signo +; para dividir dos números con distinto signo, se dividen los números y se coloca delante del resultado el signo -.* Sucede aquí lo mismo que en el caso de la suma y la resta

Como consecuencia, en los números fraccionarios con signo las cuatro operaciones típicas de la aritmética elemental se reducen a dos: la suma y la multiplicación, ya que la resta se transforma en una suma con el opuesto del sustraendo y la división por un número distinto de cero en un producto por el inverso del divisor.

Ejercicios

2. Justificar las propiedades asociativa y conmutativa del producto de números con signo, interpretándolos como diferencias de números.

3. Justificar la propiedad distributiva del producto de números con signo respecto a la suma, interpretándolos como diferencias de números.

5. LA CONDICIÓN DE NÚMEROS DE LOS NÚMEROS CON SIGNO

5.1. ¿Son números los números con signo?

Hasta ahora, hemos hablado de los números con signo pero no hemos discutido si son o no números. Desde luego, son números precedidos de un signo + ó -, pero, a ese nuevo objeto matemático formado por un número y un signo, ¿podemos darle también la consideración de número? La respuesta no es trivial, ni siquiera fácil. Si interpretamos los números con signo como sumandos o sustraendos no hay ninguna razón para considerarlos números. En el ámbito de la aritmética elemental, la caracterización de los números viene dada porque expresan cardinales de conjuntos o medidas de cantidades de magnitud. En este sentido 5 ó 4/7 son números porque pueden expresar el resultado de una medida. Pero +5 y -4/7 solo indican que en una determinada expresión los números 5 ó 4/7 tienen un papel como sumandos y sustraendos que conviene tener en cuenta a la hora de ejecutar los cálculos, dado que eso los facilita. Son, por tanto, objetos intermediarios del cálculo que dejan de tener sentido cuando éste termina, pues el resultado final de las operaciones deja ya de cumplir un papel como sumando o sustraendo

Si interpretamos los números con signo como diferencias, parece evidente que los números precedidos de un signo + sí que son números, desde el momento que son diferencias con minuendo mayor que el sustraendo y, por consiguiente, perfectamente efectuables en el campo numérico. Pero ¿que pasa con las diferencias con minuendo menor que el sustraendo? Desde el punto de vista aritmético esas diferencias no son efectuables, ya que la operación de restar se identifica con las acciones de quitar, separar, sustraer, etc., y nunca se puede quitar de donde no hay, por lo que resulta imposible aceptar que esas diferencias constituyan un número.

Durante muchos siglos –desde Diofanto (siglo III d.C)– los matemáticos usaron los números con signo en sus cálculos sin pretender que, a su vez, fueran números. Sin embargo, diversas circunstancias históricas hicieron cada vez más deseable su consideración como números. El desarrollo de una teoría general de ecuaciones fue haciendo necesaria la aceptación como soluciones de las ecuaciones de los números con signo y de sus raíces. El teorema fundamental del álgebra que dice que toda ecuación polinómica tiene, al menos, una solución, solo puede establecerse si se trabaja en un campo numérico que contenga los números con signo y sus raíces (lo que, hoy en día, conocemos como conjunto de los números complejos). Por otra parte, a partir de Descartes (siglo XVI) el álgebra se convierte en una herramienta al servicio de la geometría. Hasta entonces, las manipulaciones algebraicas se hacían para resolver problemas aritméticos y, por consiguiente, las letras representaban siempre medidas de cantidades.

La geometría analítica fue desarrollando la noción de abscisa que terminó por identificar los números con signo con los puntos de la recta, permitiendo que una misma ecuación representase una curva situada en diferentes cuadrantes. La identificación entre los números con signo y los puntos de la recta se establece a partir de la elección de dos puntos arbitrarios a los que se les adjudica los números 0 (al de la izquierda) y +1 (al de la derecha). La concatenación a derecha e izquierda del segmento (0,+1), permite definir los puntos +2, +3, +4, etc., a la derecha de cero, y los puntos -1, -2, -3, -4, etc., a la izquierda de cero. Después, mediante técnicas de fraccionamiento de segmentos se van identificando los puntos que corresponden a números fraccionarios con signo.

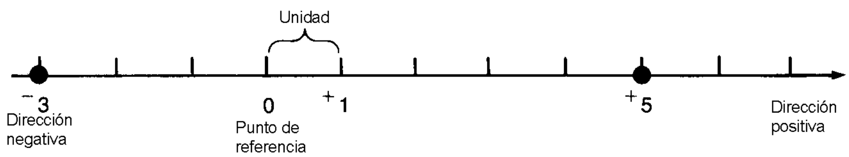


Fig. 1

La interpretación de los números con signo como puntos de la recta permite interpretar el orden entre ellos desde un punto de vista espacial: *un número con signo* α *es menor que otro* β *si está situado a la izquierda de* β *sobre la recta numérica*.

Por otro lado, la aparición de magnitudes vectoriales y relativas contribuyó también al afianzamiento de los números con signo como números. En las magnitudes vectoriales: velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc., para caracterizar una cantidad de magnitud no basta con un número que exprese su medida sino que es necesario un vector que incorpora además especificaciones sobre su dirección y sentido. En las magnitudes relativas: temperaturas, etc., la medida cero no indica ausencia de cantidad de magnitud, sino que representa la medida de una cierta cantidad de magnitud a la que convencionalmente se le atribuye ese valor para que sirva de referencia a la medida de otras cantidades de la misma magnitud. La existencia de magnitudes vectoriales y relativas permitió utilizar los números con signo para expresar cantidades de magnitud unidireccionales (en las que los signos expresan uno u otro sentido dentro de la misma dirección) y relativas (en las que el signo indica si la cantidad de magnitud es mayor o menor que la cantidad de magnitud tomada como origen).

Sin embargo, y a pesar de todos estos avances, fue necesario esperar a la revolución matemática que se produjo en el primer tercio del siglo XIX para que, definitivamente, los matemáticos asumieran que los números con signo eran números. Para ello, hubo que despojar al número de su sentido originario como medida de cantidades de magnitud y aceptar como definiciones válidas en matemáticas, no solo aquellas que "dan sentido físico" a los objetos matemáticos (definiciones esencialistas), sino también aquellas que definen los objetos matemáticos estableciendo sus reglas de manipulación (definiciones funcionales). En este nuevo marco teórico Peacock estableció en 1830 que los números con signo eran números (positivos los precedidos de un signo + y negativos los precedidos de un signo -). A los números naturales precedidos de un signo se les llamó números enteros, **Z**, y a las fracciones y los naturales precedidos de un signo, números racionales, **Q**.

5.2. Definición axiomática de Q

Vamos a dar ahora una definición funcional del conjunto de los números racionales, entendiendo por tal el conjunto de números naturales y fraccionarios precedidos del signo + ó -.

Un conjunto será considerado el "conjunto de los números racionales", **Q**, si:

a) está dotado de dos operaciones binarias, suma y producto, que cumplen las siguientes propiedades:

Suma	Producto
Asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$	Asociativa: $(xy)z = x(yz)$
Commutativa: $x+y = y+x$	Conmutativa: $xy = yx$
Elemento neutro para la suma, 0 $x+0 = x$	Elemento unidad para el producto, 1 $x.1 = x$
Cada racional tiene un opuesto único $x+(-x) = 0$	Cada racional distinto del elemento neutro tiene un inverso único $x.(1/x) = 1$
Distributiva del producto respecto a la suma $x(y+z) = xy+xz$	

b) tiene definida una relación de orden total que cumple las siguientes propiedades:

Si $x \leq y$ entonces $x+z \leq y+z$,
Si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ entonces $xy \geq 0$

De un conjunto que cumple las propiedades enunciadas en los apartados a) y b) se dice que es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Por lo tanto, Q es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado. Pero esto no basta para caracterizar al conjunto de los números racionales, es necesario añadir la siguiente propiedad:

c) No existe ningún otro cuerpo conmutativo totalmente ordenado contenido estrictamente en **Q**. Dicho de otra manera, el conjunto de los números racionales es el mínimo cuerpo conmutativo totalmente ordenado que existe.

De la misma manera, se puede definir el conjunto de los números enteros, **Z**, como el mínimo anillo conmutativo con unidad totalmente ordenado, entendiendo por tal un conjunto que cumple todas las propiedades de los apartados a) y b), salvo la que se refiere a la existencia de inverso, y que no tiene ningún anillo conmutativo con unidad totalmente ordenado estrictamente contenido en él.

Ejercicios:

3. Demostrar la propiedad de cancelación de la suma:

   Si $x+y = x+z$, entonces $y = z$.

4. Demostrar las propiedades multiplicativas del cero:
   a) $0. x = 0$, para cualquier racional x.
   b) Si $xy = 0$, donde x e y son racionales, entonces $x = 0$ ó $y= 0$.

6. TALLER MATEMÁTICO

1. El modelo de las fichas bicolores

Una representación concreta de los enteros se tiene mediante colecciones de fichas de dos colores, por ejemplo, negras y blancas, usando el convenio de que cuando se tiene un par de fichas de colores distintos se anulan mutuamente. Cada una de las configuraciones de fichas de la figura 2 sirve para representar el entero -5 porque en cada conjunto hay 5 fichas blancas en exceso respecto de la cantidad de fichas negras. Las tres primeras configuraciones se pueden reducir a la última formada sólo por cinco fichas rojas descartando los pares que se pueden formar con fichas de colores distintos. Se puede pensar que las fichas negras son pequeñas piezas de materia y las blancas de antimateria, que al juntarse desaparecen; también se puede pensar que las negras son cargas positivas (o ingresos en una contabilidad) y las blancas son cargas negativas (o retiradas de efectivo)

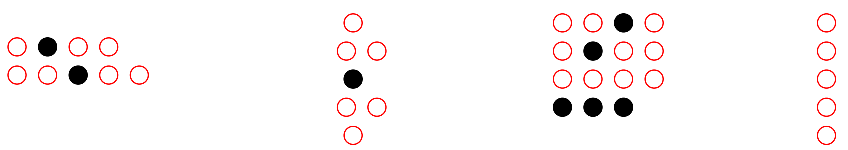


Fig. 2

Definir las operaciones de adición y multiplicación mediante el modelo concreto de las fichas bicolores. Comprobar las propiedades estructurales de los números enteros mediante ejemplos de situaciones referidas a la manipulación de colecciones de fichas bicolores.

2. Resolver los siguientes problemas explicando la solución mediante representaciones gráficas sobre la recta numérica.

a) Un misil se ha disparado a 30 metros bajo el nivel del agua; 5 segundos después está a 90 metros sobre el nivel del mar. ¿Cuántos metros ha ascendido en los 5 segundos?

b) La temperatura era de -4 grados esta noche; desde entonces ha bajado 9 grados. ¿Cuál es la temperatura ahora?
c) Hace tres años un kg de azúcar costaba 42 céntimos. Desde entonces, su precio anual ha sufrido los cambios -3, +21, -9 céntimos. ¿Cuánto cuesta ahora?
d) El saldo contable de un comerciante en las últimas seis semana ha registrado las siguientes variaciones: -4, -2, 0, +1, -1, +3. ¿Cuál ha sido su ganancia o pérdida neta?
e) En aguas quietas un barco puede moverse a la velocidad de 16 km por hora. ¿A qué velocidad puede ir en un río cuyas aguas fluyen a 5 km por hora, si va en la dirección del río. ¿Y si va contracorriente?
f) Un avión vuela a 190 km/h si va en contra del viento, mientras que si va a favor del viento vuela a 220 km/h. ¿Cuál es la velocidad del viento? ¿A qué velocidad puede volar el avión en atmósfera quieta?

3. Las temperaturas en grados Celsius se relacionan con las temperaturas en grados Fahrenheit mediante la ecuación

$$C = \frac{5.(F-32)}{9}$$

Encontrar las temperaturas Celsius correspondientes a las siguientes temperaturas Fahrenheit.
a) 104ºF b) 212ºF c) 14ºF d) 21ºF e) -4ºF f) -¯40ºF

4. Realiza las siguientes operaciones de la forma más económica posible:

a) 15-(17-6)+2(15-13)

b) 28-(-8-4):(33-29)

c) (28-(-8-4)):(33-29)

d) $32-12+20-50-20+75-(-8)^3$

e) (28-3)-5(3-9)-(6+2):4·5

f) -15-(12-20)+(-10+14)

g) -[(-8)+(-7)]-[(-5)+(+3)]

h) (-6)[(+9)-(+2)]-(-3)(-4)

i) $(7-5-1)^3(4+5)^2$

j) (1-2(-3+2)):3-(-1+2·4+3)-2+1

k) $7-2\cdot 6^2:4-3^2$

l) $(7-2)6^2:(4-3)^2$

m) $7-(2\cdot 6)^2:4-3^2$

n) $7(-2)\cdot 6^2:4(-3)^2$

ñ) $7(-2\cdot 6)^2:(4(-3)^2)$

5. Si x representa un entero distinto de cero cualquiera, ¿cuáles de las siguientes expresiones son negativas?

a) $-x$ b) $-(-x)$ c) $(-x)^2$ d) $-(x^2)$ e) x^3
f) $(-x)^3$ g) $|x|$ h) $-|x|$

6. Justificar los diferentes pasos de la siguiente demostración:

$a = 0 + a$	
$= [-(-a) + (-a)] + a$	
$= -(-a) + [(-a) + a]$	
$= -(-a) + 0$	
$= -(-a)$	

7. Usar la definición algebraica de la relación "menor que" para probar la siguiente propiedad: *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $c.a < c.b$*

8. Encontrar el conjunto de soluciones en Z de cada una de las siguientes desigualdades:

a) $(x+3)(x-2) > 0$ (Observación: ¿Bajo qué condiciones puede ser positivo un producto de dos enteros $\alpha.\beta$?)

b) $(x-1)(5-x) > 0$

Bibliografía

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, ICE de la Universidad de Zaragoza. También puede encontrarse en Internet: http://www.unizar.es/galdeano/preprints/pre01.html

Colectivo Periódica Pura (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid: Nuestra Cultural.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

González, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 257-283). Madrid: Síntesis.

González, J. L. y cols (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, M., Siles, I. y González, J. (1999). *Matemáticas 6º*. Madrid: Santillana.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

II.

PROPORCIONALIDAD PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Carmen Batanero

Índice

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. De los siguientes pares de magnitudes, ¿cuáles son directamente proporcionales?
a) Lado del cuadrado y su superficie.
b) Lado del cuadrado y su perímetro.
c) Edad y altura de las personas.
Justifica tu respuesta realizando una tabla para cada caso.

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas expresan magnitudes proporcionales[1]?

A	1	2	3	4	5
B	7	14	21	21	35

L	4	8	12	16	20
S	36	72	108	144	180

T	1	2	3	4	5
E	100	200	300	400	500

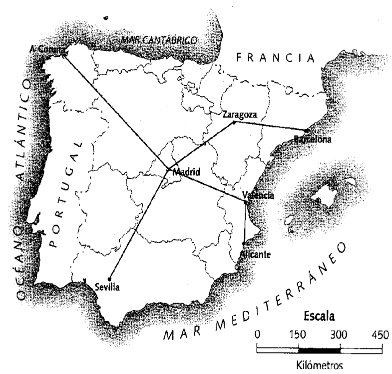
[1] Los números expresan las medidas de las cantidades correspondientes.

Comprueba tus respuestas, representando gráficamente cada tabla.

3. Explica con tus propias palabras cuándo dos magnitudes son proporcionales. Pon un ejemplo, construye su tabla y represéntala gráficamente.

4. Para hacer crema de chocolate para 6 personas se necesitan 8 onzas de chocolate, 6 cucharadas de azúcar, 4 yemas de huevo y 10 almendras, entre otros ingredientes. ¿Qué necesita Juan, de cada ingrediente, para preparar una crema para 9 personas?

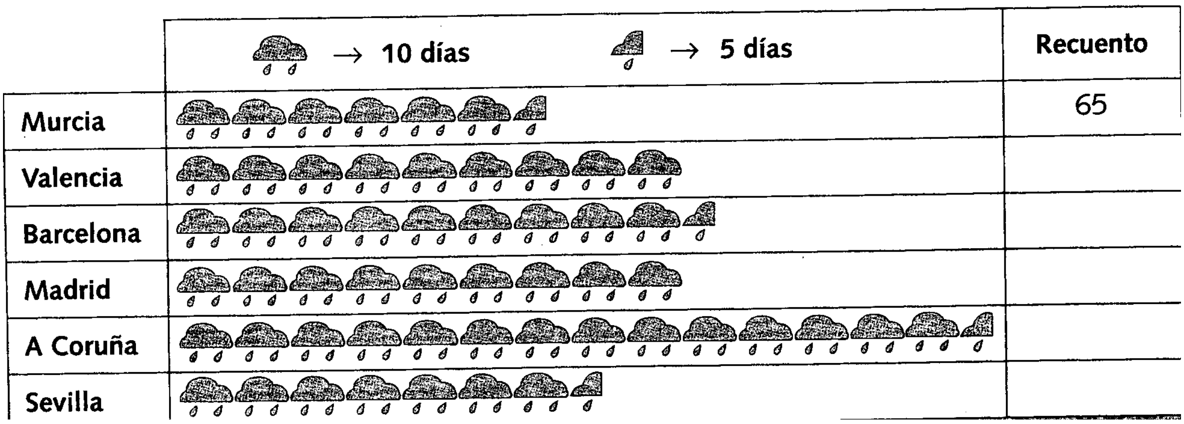
5. Observa en la escala que 1 cm representa 150 km. Esto significa que 1 cm sobre el mapa representa 150 km sobre el terreno real.



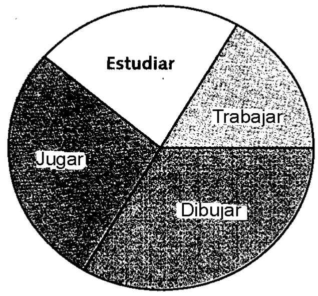
Mide en el mapa y calcula las siguientes distancias en línea recta:

- La distancia en kilómetros de Madrid a Zaragoza.
- La distancia en kilómetros de Madrid a A Coruña.
- La distancia en kilómetros de Madrid a Sevilla.
- La distancia de Madrid a Barcelona pasando por Zaragoza.
- La distancia de Madrid a Alicante pasando por Valencia.

6. El siguiente pictograma muestra el número de dias de lluvia que se registraron en un año en cada ciudad. Observa el pictograma y completa la tabla.



7. Se ha realizado una encuesta a 720 personas sobre el uso del ordenador en casa. Los resultados están representados en el siguiente gráfico de sectores. Observa el gráfico y calcula el número de personas que corresponde a cada grupo.



1º. Averigua cuántas personas representa cada grado del círculo.
2º. Mide, con un transportador, los grados de cada sector circular.
Trabajar =   ; Jugar = ; Estudiar =   ; Dibujar =
3º. Calcula el número de personas que corresponde a cada sector.
Trabajar 60º x 2=   personas   ; Jugar =--- x--- = personas
Estudiar...   Dibujar...

Porcentajes:

1. En el colegio de Celia, la directora prevé que el curso próximo el número de estudiantes aumentará un 5%. Ahora son 400. ¿Cuántos serán el año que viene?

2. Los padres de Teresa van a comprar un coche que vale 1.7500.000 pts. Pagarán el 40% de su precio cuando se lo entreguen, y el resto en 12 mensualidades iguales. Calcula las cantidades que tendrán que pagar cada vez.

3. Al comprar una moto, cuyo precio es de 789.000 pts, hay que pagar el 13% más en concepto de impuestos. ¿Cuál es el precio final de la moto?

4. La comunidad autónoma donde vive Alfredo tiene una población de 653.800 habitantes, de los cuales el 51% son mujeres. a) ¿Qué porcentaje representan los hombres?; b) ¿Cuántas mujeres hay? c) ¿Cuántos hombres hay?.

5. Se ha investigado y se ha llegado a la conclusión de que, aproximadamente, el 1% de los nacimientos que se producen es de mellizos. En una gran ciudad, donde hay unos 27.000 nacimientos al año, ¿cuántos son de mellizos?

6. Alfredo va a comprar una mochila de 6.460 pts. En la tienda le rebajan un 15%. ¿Qué porcentaje paga por la mochila? ¿Cuánto paga por la mochila?. Resuelve este problema siguiendo los siguientes pasos:
   - ¿Cuánto dinero le descontaron a Alfredo?
   - ¿Cuánto dinero pagó por la mochila?

   Compara los dos procedimientos para ver cuál te resuelta más rápido.

B: Conocimientos Matemáticos

1. LA NOCIÓN DE RAZÓN

En el tema "*Fracciones y números racionales*" hemos visto que entre los usos de las fracciones figura el de razón, entendida, de manera genérica, como la comparación entre una parte y otra parte. Es importante, sin embargo, estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes. Hoffer[2] explica claramente estas distinciones. La idea clave es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida.

El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 jamones por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 jamones/145 euros no es una fracción.

- Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como 4:7, o $4 \rightarrow 7$.

- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

[2] Hoffer, A. R. (1988). Ratios and proportional thiking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

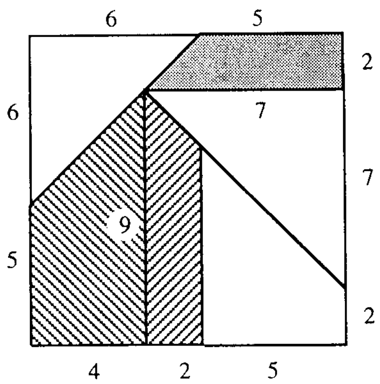
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una “suma” de razones del siguiente modo.

  2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

2. PROPORCIONES. SERIES PROPORCIONALES

2.1. Situación introductora: El puzzle

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponde a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. Trabaja en colaboración con otro compañero haciendo cada uno la mitad de las piezas.



2.2. Series proporcionales[3]

En muchas situaciones prácticas se establecen relaciones entre las cantidades de dos magnitudes, de tal modo que las cantidades de una de ellas se obtienen multiplicando por un mismo número las distintas cantidades de la otra. Por ejemplo, el precio pagado por las distintas cantidades de un artículo – supongamos que barras de pan- se obtiene multiplicando el número de barras que compramos por el precio unitario de dicho artículo –30 céntimos de euro- , de manera que si compramos 3 barras tendremos que pagar 30x3=90 (90 c)., si compramos 5 habrá que pagar 150 c., etc. En estas situaciones tenemos dos series de números, como se indica en la tabla adjunta, que se dicen son proporcionales entre sí.

Número de barras de pan	1	2	3	4	5	6	7
Precio pagado en euros	0’3	0’6	0’9	1’2	1’5	1’8	2’1

> En general, decimos que dos series de números, con el mismo número de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo *k*, llamado razón de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto por k de los valores correspondiente de la primera serie.

La relación entre ambas series de números también se puede describir diciendo que se establece una aplicación lineal de coeficiente k entre los conjuntos numéricos correspondientes: f: $A \longrightarrow B$,

[3] Maurin y Johsua (1993)

cumpliéndose que, f(a+b) = f(a) + f(b), y f(ka) = kf(a).
En consecuencia, la gráfica cartesiana de estas funciones es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

2.3 Proporciones

Cuando en la situación considerada sólo intervienen dos pares de números que se corresponden se dice que se establece una *proporción*.

A 21 le hacemos corresponder 6, y a 28 le corresponde 8. En este caso,
6 = 21.(2/7) y 8 = 28. (2/7). Por tanto, las dos series de números

21 —— 6
28 —— 8

decimos que forman una proporción. Se escribe en la forma de igualdad de dos razones:
$\frac{6}{21} = \frac{8}{28}$, o también, $\frac{6}{8} = \frac{21}{28}$.

Una proporción aparece en general bajo la forma de una igualdad entre dos fracciones. En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Cualquier cambio de disposición entre los cuatro números que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre sí dará lugar a una nueva igualdad de fracciones. Una proporción permite escribir cuatro igualdades equivalentes entre dos fracciones (que suelen ser interpretadas en este caso como razones), como se resume en el cuadro adjunto:

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} & \Longleftrightarrow & \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} & \Longleftrightarrow & \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \end{array}$$

En la práctica una de las fracciones tendrá el numerador o el denominador desconocido y se plantea el problema de encontrar su valor usando la relación de proporcionalidad que se establece.

Ejemplo:

La razón de chicos a chicas en una clase es de 2 a 3. Hay 12 chicos ¿cuántas chicas hay?

Solución:

2/3 = 12/x; x = (3/2).12 = 18; hay 18 chicas.

En el enunciado de este problema se establece implícitamente una correspondencia entre dos conjuntos de cantidades discretas: "número de chicos" y "número de chicas". Esto se traduce en que si hay 2 chicos entonces hay 3 chicas, si hubiera 4 chicos habria 6 chicas, etc., lo que se puede expresar con la función lineal,

a=(3/2).c (a, número de chicas, c número de chicos)

La gráfica cartesiana de esta clase de funciones, $y = kx$, sabemos que es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

En algunos casos, usamos frases como "la proporción de chicas en una clase es 3/5". En estos casos la segunda fracción aparece implícita, y consiste en Nc/N siendo Nc el número de chicas en la clase y N el número total de alumnos de los dos sexos. En este sentido se usa habitualmente el término proporción en estadística, en que, con frecuencia estamos interesados en estimar la proporción de elementos con una cierta característica dentro de una población.

3. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Dadas dos magnitudes A y B (por ejemplo, espacio recorrido por un móvil cuando la velocidad es constante y tiempo transcurrido) se dice que son proporcionales si están en correspondencia de tal manera que las medidas de las cantidades que se corresponden forman dos series de números proporcionales entre sí, es decir si existe una aplicación lineal $f: A \rightarrow B$.

En el ejemplo de la relación entre el espacio recorrido y el tiempo existirá una tal relación si el movimiento es uniforme, pero no si se trata de la caida de un cuerpo por la acción de la gravedad.

3.1. Proporcionalidad inversa

Se dice que dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si los valores tomados por la magnitud A y los inversos de los valores tomados por la magnitud B forman dos series proporcionales. Esta situación se presenta cuando el producto de valores tomados por las magnitudes A y B es constante, como ocurre, por ejemplo,

- la relación existente entre la presión (p) y el volumen (v) de un gas que siga la ley de Mariotte: $p.v = k$.
- la duración (t) del trayecto de longitud fija recorrida por un móvil (e) a velocidad uniforme (v): $v.t = e$.

3.2. Ejemplos de situaciones de proporcionalidad

Además de los ejemplos que hemos presentado en los apartados anteriores enumeramos algunos otros para mostrar la variedad de situaciones en las cuales se ponen en juego el modelo matemático de la proporcionalidad.

- Los numeradores y denominadores de todas las fracciones que son equivalentes entre sí (representantes del mismo racional).
- La longitud de cualquier circunferencia con su diámetro (o su radio): $l = \pi d$ $(2\pi r)$
- Longitud del arco de circunferencia y la amplitud del ángulo central correspondiente a dicho arco.
- El área de un sector circular y la amplitud del ángulo correspondiente.
- Las longitudes de diferentes segmentos marcados sobre una recta y sus proyecciones paralelas sobre otra recta (teorema de Thales)
- El volumen de líquido introducido en un recipiente con una sección regular (prisma, cilindro, ...) y la altura del líquido en el recipiente. (Esto permite la lectura del volumen graduando la altura).

- La masa de un cuerpo homogéneo y su volumen.
- El volumen de líquido que sale de un grifo de caudal constante y el tiempo que mantenemos el grifo abierto.
- La distancia medida sobre un plano o mapa realizado a una escala dada y la distancia real.
- El precio que pagamos al comprar un producto (por ejemplo, al llenar el depósito de gasolina) y la cantidad comprada (litros, en el ejemplo).
- Fijado un porcentaje, las medidas de las cantidades a las cuales se aplica dicho porcentaje (precios, pesos, etc.) y los valores resultantes del cálculo porcentual.

Hay otras muchas situaciones en que la proporcionalidad no es exacta, porque en las mismas se presenta un componente aleatorio. Sin embargo, la función lineal y la proporcionalidad se emplean también como modelo aproximado de la situación, por ejemplo:

- Altura de un hombre /mujer a una cierta edad y su peso.
- Número de hombres/ número de mujeres en un cierto país.
- Número de habitantes / número de niños nacidos (la constante de proporcionalidad es la tasa de natalidad).
- Número de glóbulos rojos en 1 cm^3 al realizar un análisis de sangre y número total de glóbulos rojos en sangre.

Estas situaciones no son objeto de estudio en la educación primaria. No obstante, la comprensión de la proporcionalidad y la función lineal en un contexto determinista es un requisito necesario para comprender posteriormente las relaciones aleatorias.

3.3. Ejemplos de situaciones de no proporcionalidad

- Los ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales corresponden a relaciones no proporcionales.
- La longitud del lado de un cuadrado y su área.
- Número de habitantes de un país y Producto Nacional Bruto.
- La edad y la altura de un niño.
- La distancia de frenado y la velocidad de un vehículo.
- El espacio recorrido por un cuerpo en caída libre en el vacío y el tiempo transcurrido.
- Las magnitudes que varían por tramos, como las tarifas de franqueo postal de una carta y su peso; los impuestos pagados y los ingresos.
- Las situaciones en las que los precios aumentan proporcionalmente a la duración o distancia, pero a partir de un valor inicial no nulo (precio de un recorrido en taxi, ya que la bajada de bandera se debe pagar aunque el tiempo o la distancia sea mínima).

Ejercicios:

1. Algunos de los siguientes problemas son de proporcionalidad y otros no. Determinar en cuáles de estas situaciones aparece la proporcionalidad y resuelve las que se pueda:

a) Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 180 pts la caja, ¿cuánto costarán 12 paquetes?
b) Si un bebé aumenta de peso 3 kgr en tres meses, ¿cuánto aumentará en el primer año?
c) Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 12 pasteles?
d) Si 5 chicas beben 3 botellas de limonada, ¿Cuánta limonada podrán beber 30 chicas?

2. En una ciudad, 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de solteros en dicha ciudad?

3. Si 8 hombres pueden cortar 9 troncos en 9 horas, ¿cuántas horas les llevará a 4 hombres cortar 3 troncos trabajando a la misma velocidad?

4. EL RAZONAMIENTO DE LA REGLA DE TRES

Con la expresión "regla de tres" se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente.

Recordemos el procedimiento y las propiedades de las proporciones en las que se basa con un ejemplo.

"Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos? (se sobreentiende que es del mismo tipo de café y al mismo precio unitario)"

Solución:

500 g ——— 5 e
450 g ——— x   x = (450.5)/500 = 4'5; 4'5 euros.

(se multiplican los dos números contiguos a la x y se divide por el opuesto)

Ciertamente, en las condiciones del enunciado, la correspondencia que se establece entre las cantidades del producto y el precio pagado es de proporcionalidad directa. Si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio (suponiendo que no hay rebajas por comprar más o menos cantidad del producto).

Por tanto, la razón de las cantidades que se corresponden debe ser constante:

$$5/500 = x/450;$$

en esta proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos,

$$5.450 = 500.x, \text{ luego } x = (5.450)/500 = 4'5.$$

La razón de las cantidades que se corresponden es constante, en cualquier orden en que se coloquen como numerador o denominador; en la disposición que hemos puesto la razón de las cantidades da al coeficiente de proporcionalidad la interpretación del precio de 1 gramo de café (5/500), por tanto, como lo que deseamos comprar es 450 habrá que multiplicar dicho precio unitario por 450.

Se puede desarrollar un procedimiento de solución de los problemas de proporcionalidad poniendo en juego las propiedades de las funciones lineales,

$$f(a+b) = f(a) + f(b);\ f(ka) = kf(a),$$

en lugar de la igualdad de los productos cruzados de los términos de dos fracciones equivalentes. En efecto, en el ejemplo dado se puede escribir:

$$5e = f(500g) = 500f(1g);\ \ f(1g) = 5/500 \text{ euros por gramo};$$

es decir, se busca, en primer lugar el precio de un gramo de café. Una vez determinado, calculamos el precio de 450 gramos:

$$f(450g) = 450f(1g) = 450.(5/500) = 4'5 \text{ euros}.$$

Ejercicio

4. La fuerza de la gravedad en la Luna es 1/6 de la fuerza de la gravedad en la Tierra. Si una persona es capaz de hacer un salto de altura de 1'70 m y un salto de longitud de 4'85 m, ¿cuánto podrá saltar en altura y longitud en la Luna? Aplica el razonamiento de regla de tres y el razonamiento de función lineal para hacer los cálculos.

5. PORCENTAJES

La notación de porcentajes y el razonamiento de proporcionalidad que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100 se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. La expresión "x%" es una manera alternativa de expresar la fracción x/100, pero el concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí, no sólo de manera absoluta (cual de los dos es mayor), sino de una manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o *proporción* de uno representa respecto del otro. En estas situaciones se suele utilizar el número 100, que es bien familiar, como referencia. Al situarlo como denominador de una fracción, su numerador nos indica qué porción de 100 representa. El siguiente ejemplo muestra el interés de hacer estas comparaciones relativas y de adoptar 100 como base de comparación.

Ejemplo:

En una elección en la que se emitieron 5.781.200 de votos un candidato obtuvo 2.948.412 votos; en la siguiente elección se emitieron 6. 456.900 votos y dicho candidato obtuvo 3.099.312 votos. ¿Han mejorado los resultados de este candidato entre una y otra votación?

En la primera votación la fracción de votos obtenidos ha sido:

2.948.412/5.781.200 = 51/100; mientras que en la segunda

3.099.312/6.456.900 = 48/100.

El uso de los porcentajes permite conocer el número de votantes que recibió el candidato por cada 100 votantes, y comprobar de manera inmediata que el candidato ha perdido posición entre el electorado.

Sin embargo, la noción de porcentaje no sólo se utiliza para establecer comparaciones en valor relativo entre dos números. Una vez que se fija un porcentaje se puede aplicar a distintos números, obteniendo de este modo series de números proporcionales. Si se aplica el 30% de descuento a los precios de tres artículos A, B, C, cuyo valor es de 153, 452, 532 euros, respectivamente, entre los precios dados y los descuentos, se establece una correspondencia de proporcionalidad directa, cuya razón de proporcionalidad es 30/100:

30	A’	B’	C’
100	150	450	540

A’ = 0’30 x 150 = 45; B’ = 0’30 x 450 = 135; C’ = 0’30 x 540= 162

Ejercicios:

5. Justificar las siguientes reglas:

Regla 1ª: Para calcular el p % de un número a basta con multiplicar a por el operador decimal de porcentaje (p/100).

Regla 2ª: Aumentar un número en el p % de su valor equivale a calcular (100+p)% de dicho número, o sea, multiplicar dicho número por (1+p/100).

Regla 3ª: Disminuir o reducir un número en el p% de su valor equivale a calcular el (100-p)% de dicho número, o sea, multiplicar dicho número por: (1-p/100).

6. En los problemas de porcentajes intervienen cuatro números, a, b, c y 100 (a, el porcentaje a aplicar; b, la cantidad a la que se aplica el %; c, el resultado de aplicar el %. Inventar problemas que correspondan a estos tres tipos.

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En un catálogo, un mismo producto se presenta de dos formas distintas: en paquetes de 5 unidades al precio de 2’6 euros por paquete, y en paquetes de 17 unidades a 8’8 euros el paquete. ¿Es posible saber si el producto se vende al mismo precio unitario en ambas modalidades sin hacer cálculos, esto es, mediante una representación gráfica?

2. Un poste de 2’40 m de alto se coloca verticalmente en el suelo hincándolo una profundidad de 30 cm. La sombra que le proyecta el sol es de 1’75 m. En el mismo instante, un ciprés situado en las proximidades proyecta una sobra de 9’50 m. ¿Cuál es la altura del ciprés?.

3. Tres niños, Alberto, Bernardo y Carlos juegan una partida con canicas. Antes de la partida, cada uno tiene a, b, c canicas, respectivamente. La serie de números (a, b, c) es proporcional a la serie (3, 4, 5).

1) Encontrar la fracción de canicas que cada niño tiene respecto del total de canicas (se puede utilizar una tabla de proporcionalidad)
2) Después de la partida, los números de canicas que tienen los niños son, respectivamente, proporcionales a los números 15, 16 y 17.
   a) ¿Cuál es la fracción de canicas que tiene cada niño respecto del total?
   b) Uno de los niños ha ganado 9 canicas. ¿Quién ha sido? Justificar la respuesta.

c) ¿Cuál es el número total de canicas?

4. Sabiendo que un litro de leche pesa 1030 gramos, que la leche contiene el 12% de su peso en crema y que la crema da un 32 % de su peso en mantequilla, ¿cuánta mantequilla se otiene con 400 litros de leche?

5. Un artículo que vale 9’2 euros ha sufrido dos aumentos sucesivos del 5% y del 15%. ¿Cuál ha sido el incremento del precio en porcentaje y en valor?

6. Después de dos incrementos de precio, el primero del 10% y el segundo del 20 %, un artículo cuesta 79’2 euros. ¿Cuánto costaba antes de los aumentos de precio?

7. En una cierta población el 40% de los hombres están casados y el 30% de las mujeres están casadas. ¿Qué porcentaje de la población adulta está casada?

8. Un garaje de reparación de coches anuncia que hace el 10% de descuento en las reparadas, el 5% en los materiales y el 5% en la mano de obra. Una Asociación de Defensa del Consumidor ha denunciado a este garaje por publicidad falsa. ¿Es justa la denuncia de la asociación? Explicar la respuesta.

9. Demostrar que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

10. Dos analgésicos A y B han sido experimentados en dos muestras de personas, de edades y situación clínica similares, como remedio para la jaqueca. Se han obtenido los datos siguientes:

	Mejoran	No Mejoran
Analgésico A	40	60
Analgésico B	90	210

¿Son igualmente efectivos los dos analgésicos? ¿Cuántos pacientes debieran mejorar con el tratamiento B para que sea igualmente efectivo que el A?

11. Juan y Maria juegan a los dados. Lanzan dos dados. Si el producto de los números es impar, Juan gana un euro. Si el producto de los números es par, gana Maria. ¿Qué cantidad debe ganar Maria, para que el juego sea equitativo?

12. En un Mac Donald se pueden consumir diferentes tipos de alimento. En la tabla siguiente presentamos el contenido calórico y de grasas saturadas de una ración:

	Calorías	Grasas (en Gramos)
Patatas fritas	1500	100
Alitas de pollo	600	40
Buñuelos	450	22
Pastel de crema	290	19
Aritos de cebolla	276	16

Sabiendo que cada gramo de grasa tiene 9 calorías, determina el porcentaje de grasas de cada uno de estos alimentos.
Si una persona se toma un día una ración de cada uno de estos alimentos, ¿Cuál ha sido su consumo total de calorías y grasas? ¿En que porcentaje sobrepasa la cantidad recomendada de 2000 calorías y 65 gramos de grasa por persona y día?

Bibliografía

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.

Fernandez, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Hoffer, A. R. Ratios and proportional thinking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 2. París: Editions Marketing (Ellipses).

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (3), 331-363.

Reys, R. E. y cols (2001). *Helping children learn mathematics*. New York: John Wiley

Van de Walle, J. A. (2001).*Elementary and middle school mathematics*. New York: Longman.

III.

GEOMETRÍA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Francisco Ruiz

Índice

Capítulo 1:
FIGURAS GEOMÉTRICAS

Página

Capítulo 2:
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SIMETRÍA Y SEMEJANZA

Capítulo 3:
ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

III.

Geometría para Maestros

Capítulo 1:

FIGURAS GEOMÉTRICAS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA

Consigna:
Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno lo consideres más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

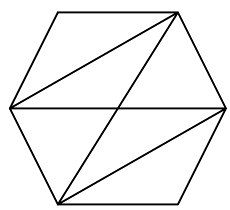
1. ¿En cuántos puntos pueden cortarse cuatro rectas?

2. Dibuja un polígono convexo de siete lados y traza sus diagonales. ¿cuántas diagonales tiene?

3. ¿Cuántos grados mide el ángulo central de un decágono regular?

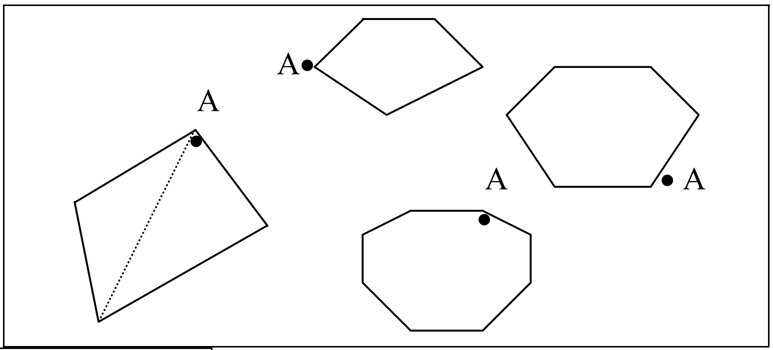
4. Repite esta plantilla seis veces y colorea en cada caso

a) Un triángulo equilátero
b) Un triángulo isósceles
c) Un triángulo escaleno
d) Un trapecio
e) Un rectángulo
f) Un rombo



5. Corta un cuadrado y construye un romboide con las partes.

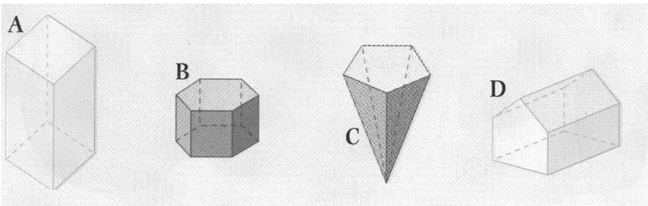
6. En cada uno de estos polígonos traza las diagonales que parten del vértice A. Cuenta el número de triángulos en que ha quedado dividido cada uno de los polígonos y completa la tabla



Número de lados	4 5 6 7 8 9 10
Número de triángulos	2

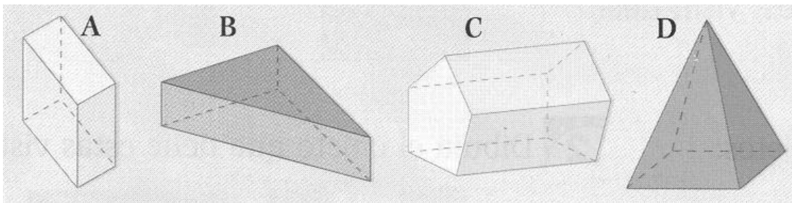
7. Dibuja en papel cuadriculado:
   a) Un cuadrilátero que tenga dos ángulos agudos, dos ángulos obtusos y dos pares de lados paralelos.
   b) Un cuadrilátero que tenga los cuatro ángulos rectos y los lados iguales dos a dos.

8. Cuenta el número de caras, aristas y vértices de cada uno de estos poliedros y comprueba que: nº de caras + nº de vértices = nº de aristas + 2.

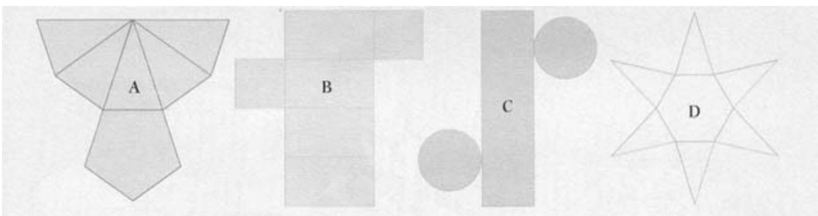


	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
A			
B			
C			
D			

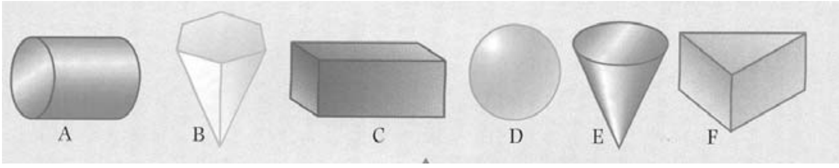
9. Dibuja el desarrollo de estos poliedros



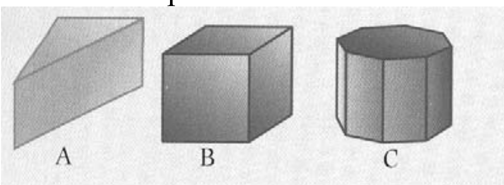
10. ¿Qué figura obtendrías a partir de cada uno de estos desarrollos?



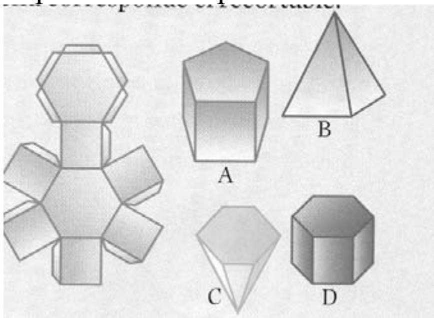
11. Escribe el nombre de cada uno de estos cuerpos geométricos



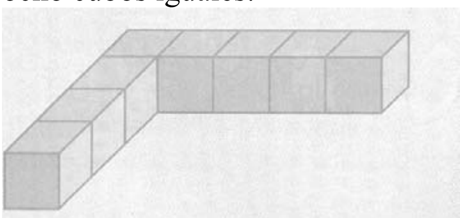
12. a) ¿Cuántas caras laterales tiene cada uno de estos prismas ?



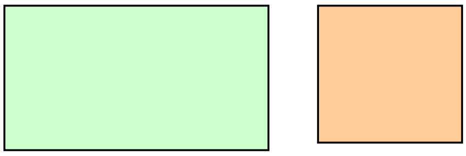
b) ¿A cuál de los cuerpos de la izquierda corresponde el recortable?



c) Dibuja todos los polígonos que forman las caras de este poliedro construido con ocho cubos iguales:



d) Escribe en qué se parecen y en qué se diferencia estos dos polígonos:



B: Conocimientos Matemáticos

1. LA GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

1.1. Naturaleza de los objetos geométricos

Antes de comenzar a estudiar la geometría y de ver cómo podemos ayudar a los niños a que aprendan geometría, consideramos necesario aclarar de qué trata esta rama de las matemáticas y reflexionar sobre la naturaleza de sus objetos. El significado etimológico de la palabra geometría, "medida de la tierra", nos indica su origen de tipo práctico, relacionado con las actividades de reconstrucción de los límites de las parcelas de terreno que tenían que hacer los egipcios, tras las inundaciones del Nilo. Pero la Geometría dejó hace ya hace mucho tiempo de ocuparse de la medida de la tierra. Con los griegos la geometría se interesó por el mundo de las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes.

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, *punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro*, etc. Tales términos y expresiones designan "figuras geométricas", las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptibles, como este ordenador, una mesa o un árbol. Un punto, una línea, un plano, un círculo, etc., no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad, etc.

Un problema didáctico crucial es que con frecuencia usamos la misma palabra para referimos a los objetos perceptibles con determinada forma geométrica ("el triángulo es un instrumento de percusión") y al concepto geométrico correspondiente (el triángulo isósceles). Además, en la clase de matemáticas, y en los textos escolares no se diferencian los dos planos (objeto abstracto, realidad concreta) y encontramos expresiones como: "Dibuja una recta (un triángulo, etc)". Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un triángulo. Lo que se dibuja es un objeto perceptible que evoca o simboliza el objeto abstracto correspondiente. La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos que se hacen de ella. Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel: *Es una forma controlada por su definición*.

Las entidades matemáticas y también las geométricas son creadas en última instancia mediante definiciones, reglas que fijan el uso de los términos y expresiones. Ciertamente que no serán reglas arbitrarias, sino que se harán de manera que sean útiles para la descripción del mundo que nos rodea –o de mundos imaginarios-, pero su naturaleza es la que hace que establecer una propiedad geométrica (por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo plano sea un ángulo llano) sea un acto esencialmente distinto a descubrir que todos los leones son carnívoros. Esta naturaleza es de tipo "gramatical" (puesto que se deriva de las reglas de uso de las palabras y expresiones) y es la que concede a las entidades matemáticas su carácter necesario, universal y atemporal.

El "lenguaje" geométrico tiene su origen en nuestra necesidad de describir el mundo de las formas de los cuerpos perceptibles que nos rodean, su tamaño y posición en el espacio.

Pero superada la primera fase de clasificación de las formas, de identificación de las propiedades de las clases de objetos y la creación de un lenguaje que permita su descripción de manera precisa, la actividad geométrica se ocupa de estructurar el mundo de entidades geométricas creadas y de deducir las consecuencias lógicas que se derivan de los convenios establecidos. Rápidamente somos arrojados fuera del cómodo mundo de nuestras percepciones para entrar en el mundo del lenguaje, de la gramática y de la lógica. Cuando pedimos a un niño que entre una colección de paralelogramos identifique los rectángulos, no le exigimos que discrimine la forma perceptible de los rectángulos de entre las restantes figuras, sino que sea capaz de aplicar los convenios que hemos establecido para el uso de la palabra 'rectángulo'. Siendo un poco exigentes, incluso podemos criticar la pertinencia de esa tarea, ya que visualmente es imposible saber si un romboide cuyos ángulos miden 89º (y 91º) debemos considerarlo o no como un rectángulo. La respuesta correcta que un niño debería dar sería algo así como, "*si estos ángulos de estas figuras son efectivamente rectos, entonces decimos que son rectángulos*"; también debería incluir los cuadrados entre los rectángulos.

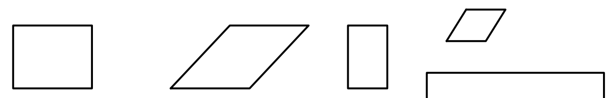


Fig. 1

Como conclusión, debemos tener claro que cuando hablamos de "figuras o formas geométricas" no nos referimos a ninguna clase de objetos perceptibles, aunque ciertamente los dibujos, imágenes y materializaciones concretas son, al menos en los primeros niveles del aprendizaje, la razón de ser del lenguaje geométrico y el apoyo intuitivo para la formulación de conjeturas sobre las relaciones entre las entidades y propiedades geométricas.

1.2. Aplicaciones de la geometría

La Geometría estudia las formas de las figuras y los cuerpos geométricos. En la vida cotidiana encontramos modelos y ejemplificaciones físicas de esos objetos ideales de los que se ocupa la Geometría, siendo muchas y variadas las aplicaciones de esta parte de las matemáticas.

Una de las principales fuentes de estos objetos físicos que evocan figuras y cuerpos geométricos está en la propia Naturaleza. Multitud de elementos naturales de distinta especie comparten la misma forma, como ocurre con las formas en espiral (conchas marina, caracoles, galaxias, hojas de los helechos, disposición de las semillas del girasol, etc.). Igualmente encontramos semejanzas entre las ramificaciones de los árboles, el sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos, o entre los cristales, las pompas de jabón y las placas de los caparazones de las tortugas. La Naturaleza, en contextos diferentes, utiliza un número reducido de formas parecidas, y parece que tuviese predilección por las formas serpenteantes, las espirales y las uniones de 120º. Pensemos en la disposición hexagonal perfecta de las celdillas de los panales de las abejas, siendo su interior poliedros que recubren el espacio, como el rombododecaedro.

El ser humano refleja en su quehacer diario y en sus obras de arte esas imágenes ideales que obtiene de la observación de la Naturaleza: realiza objetos de cerámica, dibujos, edificios y los más diversos utensilios proyectando en ellos las figuras geométricas que ha perfeccionado en la mente. El entorno artístico y arquitectónico ha sido un importante factor de desarrollo de la Geometría. Así desde la construcción de viviendas o monumentos funerarios (pirámides de Egipto), hasta templos de los más diversos estilos han impulsado constantemente el descubrimiento de nuevas formas y propiedades geométricas.

Muchas profesiones, además de los matemáticos, arquitectos e ingenieros necesitan y usan la Geometría: albañiles, ceramistas, artesanos (objetos de taracea, trabajos de cuero, repujados de latón, tejedores de alfombras, bordadoras, encajes de bolillos, etc.), decoradores, coreógrafos, diseñadores de muebles, etc. Todos ellos de una forma más o menos consciente, utilizan el espacio y las formas geométricas.

También se encuentra la geometría en los juegos: billar (bolas y mesa en forma de doble cuadrado, con rombos en los bordes), parchís, ajedrez, la rayuela, el juego de los barcos, así como multitud de juegos de ordenador. El mundo de los deportes está repleto de figuras geométricas: fútbol (el rectángulo del campo, las áreas, el balón, las porterías, etc.), baloncesto (canastas, zonas, campo, etc.), tenis, rugby, béisbol, etc.

Seguramente el lector puede completar estas listas de situaciones y ámbitos donde podemos encontrar objetos geométricos, y cuyo manejo facilita el conocimiento de tales ámbitos.

Ejercicio:

1. Hacer una lista de figuras y conceptos geométricos que encuentres en: Naturaleza; artes; música; la calle; la casa; el deporte; los juegos; las profesiones.

1.3. Situaciones introductorias

A. Lista mínima de propiedades

En la figura adjunta hay representados diversos rectángulos. Listar todas las posibles propiedades de los rectángulos. Por ejemplo:
- tiene cuatro lados
- los lados opuestos son paralelos
- etc.

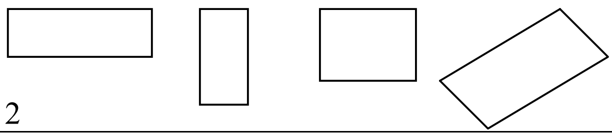


Fig. 2

Elaborar una lista mínima de propiedades de tal manera que si una figura tiene esas propiedades podemos decir que es un rectángulo.

B. Deducción informal

Demostrar si los enunciados siguientes son verdaderos o falso:
- Si una figura (F) es un cilindro, entonces es un prima.
- Si F es un prisma, entonces es un cilindro.
- Si F es un cuadrado, entonces es un rombo.
- Todos los paralelogramos tienen diagonales congruentes.
- Todos los cuadriláteros con diagonales congruentes son paralelogramos.
- Si dos rectángulos tienen la misma área, entonces son congruentes.
. Todos los prismas tienen un plano de simetría.
- Todos los prismas rectos tienen un plano de simetría.
- Si un prisma tiene un plano de simetría, entonces es un prisma recto.

2. COMPONENTES ELEMENTALES DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

2.1. Puntos, rectas, planos y espacio

En el cuadro adjunto hemos escrito las letras A, B, P, Q a la derecha de una diminuta marca redondeada. Decimos que dichas marcas son *puntos*. Igualmente diríamos que se trata de puntos si en lugar de usar una impresora láser para hacer la impresión usáramos un lápiz con una punta gruesa, o un lápiz imaginario que dibuja puntos tan finos que sean prácticamente imperceptibles.

. A . P . Q

Fig.3 . B

El punto, como objeto o figura geométrica, se considera que no tiene dimensiones y se usa para indicar una posición en el espacio.

En el cuadro siguiente decimos que hay representadas dos líneas rectas designadas con las letras r y s:

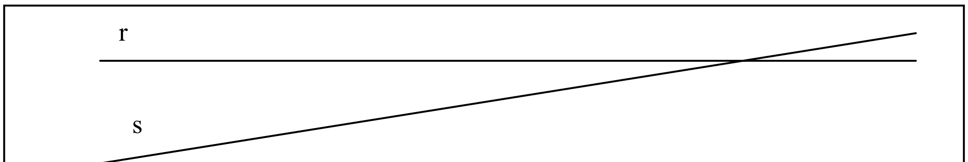


Fig. 4

Pero al objeto o figura geométrica *línea recta* se le atribuyen unas características que realmente no tienen los trazos marcados en el cuadro. Se considera que las rectas son ilimitadas por ambos extremos, así como que no tienen ningún espesor, lo que hace imposible "representar" las rectas. La característica de ser ilimitadas por ambos extremos se suele indicar marcando flechas en cada extremo. Otras experiencias que sugieren la *idea* de recta pueden ser un hilo tirante, el borde una regla, etc.

Se considera que dos puntos determinan una y sólo una línea recta que contiene a dichos puntos. Tres o más puntos pueden determinar varias rectas, pero si están contenidas en una recta se dice que son colineales.

Tres puntos no colineales se dice que determinan un plano, figura geométrica que suele ser evocada por una hoja de papel apoyada sobre una mesa, la propia superficie de una mesa, la pizarra, etc. De nuevo al objeto o figura geométrica designada con la palabra 'plano' se le atribuyen unas características ideales que no tienen tales objetos perceptibles, como no tener límites en ninguna dirección, ni tampoco ningún espesor.

Se dice que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. Se considera el *espacio* como el conjunto de todos los puntos. Cualquier subconjunto de puntos del espacio se considera como una *figura geométrica*. El objetivo de la geometría será describir, clasificar y estudiar las propiedades de las figuras geométricas.

Dos rectas contenidas en el plano que no tienen ningún punto en común se dice que son *paralelas*. Si tienen un punto en común se dice que son *concurrentes*. Una recta que corta a otras dos se dice que es una *transversal*.

Todo punto P divide a una recta que lo contiene en dos subconjuntos formados por los puntos que están situados a un mismo lado respecto de P. Estos subconjuntos se dice que son *semirectas* o rayos de extremo P.

También se habla de *semiplanos:* cada una de las dos partes en que queda dividido un plano al quitar una recta del mismo. También serán semiplanos abiertos o cerrados, según que se incluya o no la recta a partir de la cual se forma.

Ejercicios:

2. ¿En cuántas partes queda dividido un plano al quitarle:
a) Dos rectas paralelas; b) Dos rectas concurrentes; c) Tres rectas, dos de las cuales son paralelas; d) Tres rectas concurrentes.

3. ¿Se puede separar un plano en cinco partes quitando: a) tres rectas; b) cuatro rectas?

4. ¿Cuál es el máximo número de partes en que se puede cortar un plano por 7 rectas?

5. Describir el interior de la siguiente figura como intersección o unión de semiplanos:

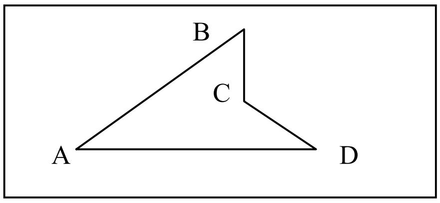
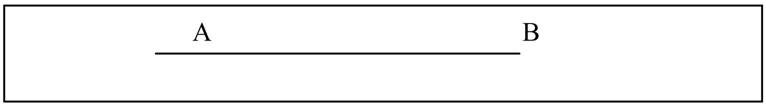


Fig. 5

5. Describir el interior de un tetraedro como intersección de semiespacios abiertos.

2.2. Segmentos y ángulos

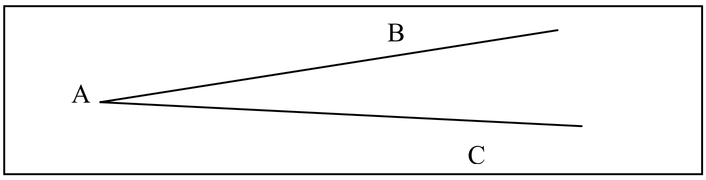
En el siguiente cuadro decimos que está representado el segmento AB, conjunto de puntos comprendidos entre los puntos A y B, que se dice son los extremos del segmento.

Fig. 6


La distancia entre los puntos A y B se dice que es la longitud del segmento AB. Dos segmentos AB y CD se dice que son *congruentes* si tienen la misma longitud.

Un segmento se puede definir también como la intersección de dos semirectas contenidas en una misma recta. Los segmentos pueden ser abiertos o cerrados según que en las semirectas se consideren incluidos o no los extremos.

Un *ángulo* se puede considerar como la intersección de dos semiplanos cerrados, obtenidos a partir de dos rectas incidentes. Ambas semirectas son los lados del ángulo y el punto de concurrencia es el vértice. También se usa la palabra ángulo para designar a la figura geométrica formada solamente por el conjunto de los lados y el vértice. La figura siguiente representa el ángulo formado por las semirectas AB y AC; se suele designar como ángulo

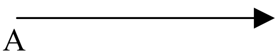
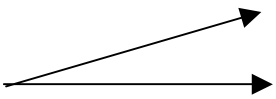
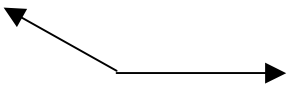
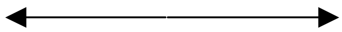
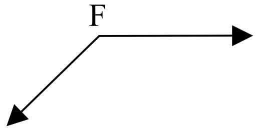
Fig. 7


$\angle$BAC o tambien como $\angle$CAB

Un ángulo cuyos lados no están sobre la misma recta separa al plano en dos partes, el *interior* y el *exterior* del ángulo. El subconjunto de puntos del plano formados por todos los segmentos que unen puntos situados sobre los lados AB y AC forman el interior del ángulo, y su complementario respecto del plano será el exterior.

El tamaño de un ángulo se mide por la cantidad de rotación requerida para girar uno de los lados del ángulo, tomando como centro de giro el vértice, para que coincida con el otro lado. Como unidad de medida habitual se usa el grado, la 360 ava parte de la abertura de la circunferencia. La medida de un ángulo $\angle$ A la indicaremos por $m(\angle A)$

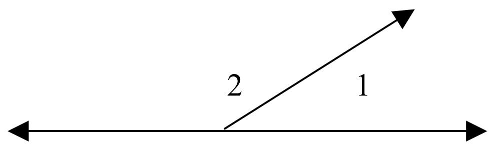
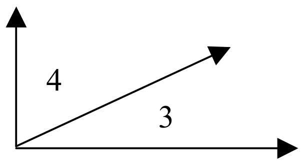
Clasificación de los ángulos por su medida

ángulo nulo, m($\angle$ A) =0º  A	ángulo agudo, 0< m($\angle$ B) < 90º  B	ángulo recto, m($\angle$ C) = 90º  C
ángulo obtuso, 90 < m($\angle$ D) < 180º  D	ángulo llano, m($\angle$ E) = 180º  E	ángulo reflejo, 180º< m($\angle$ A) < 360º F 

Pares de ángulos y teoremas relacionados

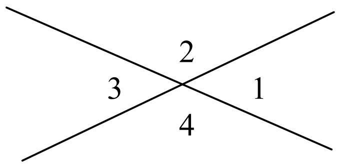
- Dos ángulos con medidas m_1 y m_2 se dice que son complementarios si y sólo si $m_1 + m_2 = 90º$. Se dice que son suplementarios si $m_1 + m_2 = 180º$.

- Dos ángulos que tienen un lado común y cuyos interiores no se solapan se dice que son adyacentes.

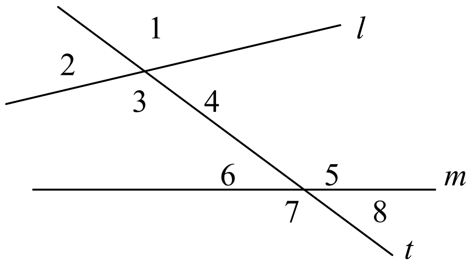
 $\angle$ 1 y $\angle$ 2 son ángulos adyacentes suplementarios	 $\angle$ 3 y $\angle$ 4 son ángulos adyacentes complementarios

- Dos ángulos se llaman verticales cuando sus cuatro lados forman dos rectas que se cortan

- Cuando dos líneas *l* y *m* se cortan en dos puntos por otra recta transversal *t* se forman cuatro pares de ángulos que se llaman ángulos correspondientes (Fig. 8).



∠ 1 y ∠ 3 son ángulos verticales
∠ 2 y ∠ 4 son ángulos verticales



Ángulos correspondientes:
∠ 1 y ∠ 5 ; ∠ 2 y ∠ 6 ; ∠ 3 y ∠ 7 ; ∠ 4 y ∠ 8

Fig. 8

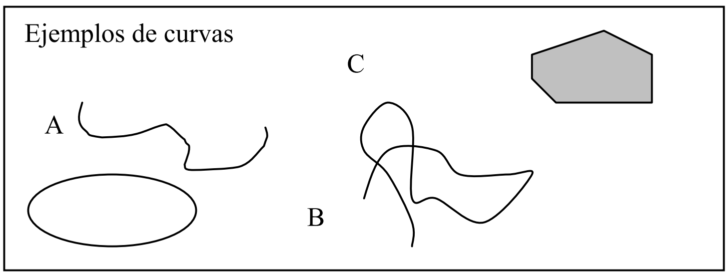
Ejercicios:

6. Intenta probar los siguientes teoremas sobre ángulos:
   1) Si dos rectas paralelas se cortan por una transveral los ángulos correspondientes son iguales.
   2) Si dos rectas del plano son cortadas por una transversal de manera que los ángulos correspondientes son iguales, entonces las rectas son paralelas.
   3) Dos rectas cortadas por una transveral son paralelas si y sólo si un par de ángulos alternos internos son congruentes.
   4) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios adyacentes forman un ángulo recto.
   5) Medida de los ángulos de un triángulo: la suma de los ángulos interiores de cualquier tríangulo es un ángulo llano.

3. CURVAS Y POLÍGONOS EN EL PLANO

3.1. Curvas y regiones

Una *curva* plana se puede describir de manera intuitiva e informal como el conjunto de puntos que un lápiz traza al ser desplazado por el plano sin ser levantado. Si el lápiz nunca pasa dos veces por un mismo punto se dice que la curva es *simple*. Si el lápiz se levanta en el mismo punto en que comenzó a trazar se dice que la curva es *cerrada*. . Si el único punto por el que el lápiz pasa dos veces es el del comienzo y final del trazado se dirá que la curva es *cerrada y simple*. Se requiere que las curvas tengan un punto inicial y otro final, por lo que las rectas, semirecta y ángulos no son curvas.



Teorema de la curva de Jordan:

Una curva cerrada simple separa los puntos del plano en tres subconjuntos disjuntos: la propia curva, el interior, y el exterior de la curva. Esta propiedad parece obvia en casos sencillos, pero enunciada en términos generales requiere una demostración matemática nada fácil. Incluso la demostración dada por el matemático francés Camile Jordan (1838-1922) que enunció este teorema era incorrecta.

El interior y el exterior de una curva cerrada simple se designan también como *regiones*. De manera más general el conjunto complementario, respecto del plano que las contiene, de conjuntos de rectas, semirectas y curvas está compuesto de una o más regiones. Por ejemplo, una recta separa al plano en dos regiones llamadas *semiplanos*. Un ángulo, si no es nulo o llano, separa al plano en dos regiones llamadas el interior y el exterior del ángulo.

Curvas y figuras convexas

Una figura se dice que es *convexa*, si y sólo si, contiene el segmento PQ para cada par de puntos P y Q contenidos en la figura. Las figuras no convexas se dice que son *cóncavas*.

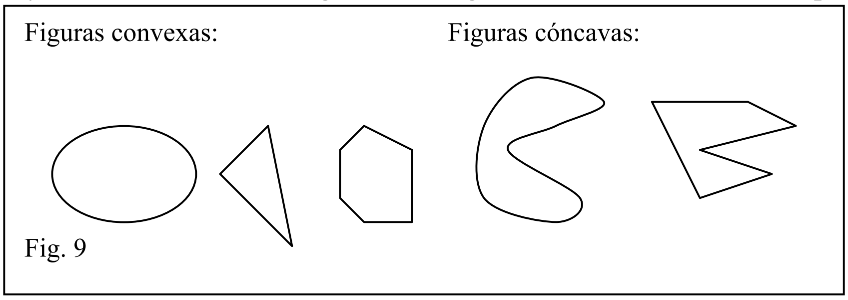


Fig. 9

La *circunferencia* es una curva cerrada, convexa, tal que la distancia de cualquiera de sus puntos a otro fijo es constante. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante se llama radio (también se llama radio al segmento que uno el centro con cualquier punto de la circunferencia; un diámetro es cualquier segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

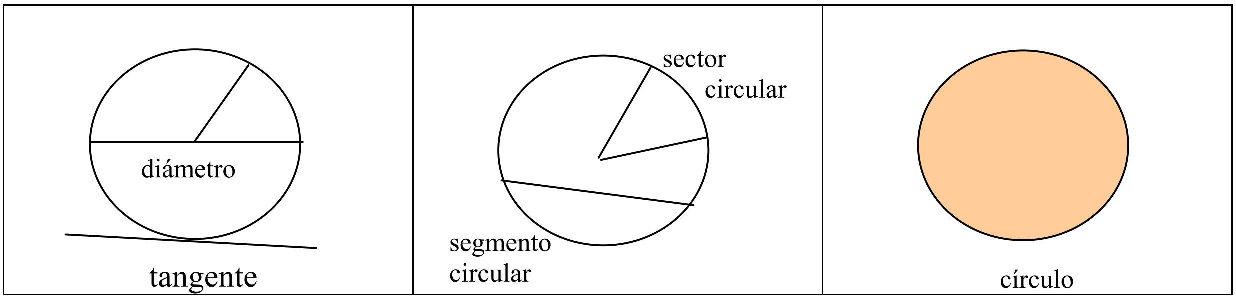


Fig. 10

3.2. Curvas poligonales y polígonos

Una curva simple que está formada por segmentos unidos por sus extremos se dice que es una *curva poligonal* . Si dicha curva es cerrada se dice que es un *polígono*: a los segmentos que la forman se llaman *lados* y a los extremos de esos segmentos, *vértices*. Si todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular.

En principio, nada se dice sobre si las curvas poligonales, y los polígonos, han de ser planos. También se puede hablar de poligonales y polígonos espaciales, aunque el estudio de los polígonos se suele restringir a los polígonos contenidos en el plano.

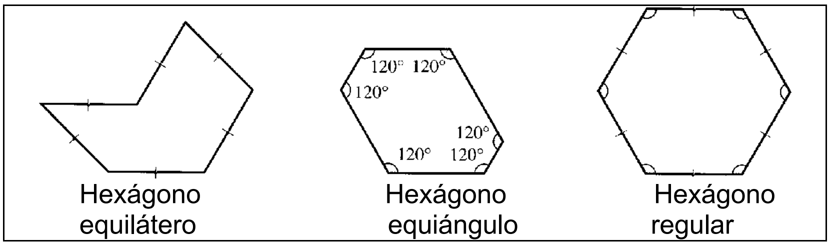
Los polígonos se nombran según el número de lados o vértices que tienen (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc).

Las semirectas que contienen a dos lados concurrentes en un vértices determinan un ángulo del polígono. En un polígono convexo el interior del polígono será la intersección de los interiores de los ángulos del polígono. Si en un ángulo interior de un polígono sustituimos una de las semirectas por su opuesta se obtiene otro ángulo distinto llamado *ángulo exterior*.

Polígonos regulares

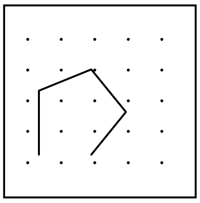
- Un polígono que tiene todos sus lados iguales se dice que es *equilátero* (todos sus lados son congruentes).
- Un polígono convexo cuyos ángulos interiores son todos congruentes se dice que es *equiángulo*.
- Un polígono convexo que es tiene sus lados y sus ángulos iguales se dice que es *regular*.
- En un polígono regular de n lados, cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados contienen vértices adyacentes del polígono se dice que es un ángulo central del polígono.

Fig. 11



Ejercicios:

7. Un material didáctico conocido como geoplano es una herramienta útil en el estudio de los polígonos. Un geoplano 5x5 consiste en una plancha de madera y 25 clavos dispuestos según una malla cuadrada, como se indica en la figura. Se emplean gomas de colores para formar diversos polígonos tomando los clavos como sus vértices. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en este geoplano?



8. Probar que en un polígono regular de n lados,
   a) cada ángulo interior mide: $(n\text{-}2).\ 180º/n$
   b) cada ángulos exterior mide: $360º/n$
   c) cada ángulo central mide: $360º/n$

9. Un rectángulo ha sido dividido en dos partes congruentes. ¿Qúe forma pueden tener las partes formadas?

4. LOS TRIÁNGULOS Y SU CLASIFICACIÓN

4.1. Definiciones y propiedades

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan *lados*, y los extremos de los lados, *vértices*.

En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: *interior* (formado por dos lados) y *exterior* (formado por un lado y la prolongación de otro).

Algunas propiedades

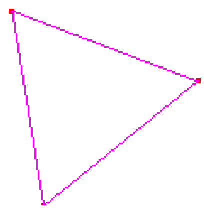
1. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
2. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
3. Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
4. Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendidos.
5. Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados iguales.
6. En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.
7. Si un triángulo tiene dos lados iguales, sus ángulos opuestos son también iguales.
8. En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

4.2. Clasificación de triángulos

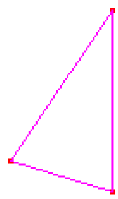
Los triángulos se clasifican atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

Atendiendo a sus lados

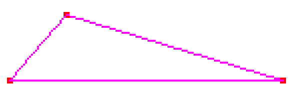
a) Equiláteros: Son los que tienen sus 3 lados iguales.



b) Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.

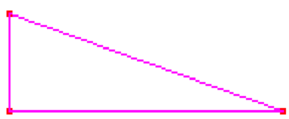


c) Escalenos: Son los que sus 3 son lados desiguales.

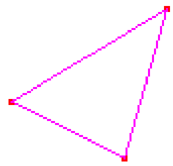


Atendiendo a sus ángulos:

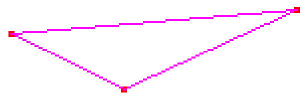
a) Rectángulos: Son los que tienen un ángulo recto (90°).



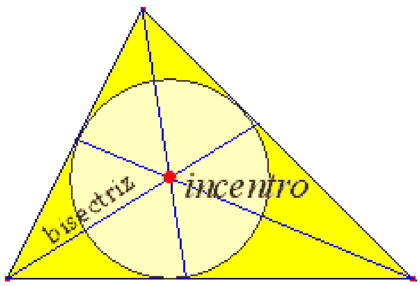
b) Acutángulos: Son los que tienen sus 3 ángulos agudos.



c) Obtusángulos: Son los que tienen un ángulo obtuso.

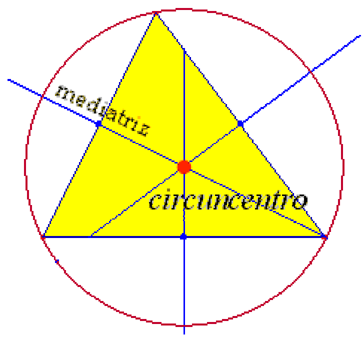


4.3. Elementos notables de un triángulo. Construcción de triángulos



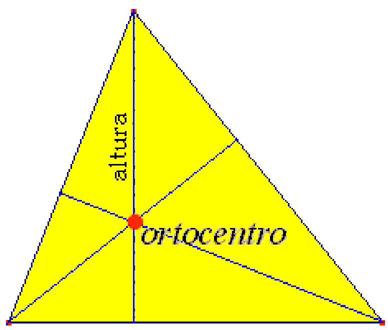
Bisectriz es la semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro, que es el centro de la circunferencia inscrita.



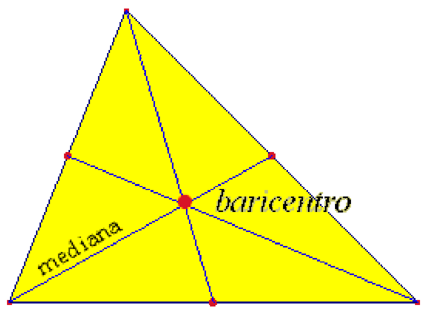
Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.

Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro, que es el centro de la circunferencia circunscrita.



Altura es el segmento perpendicular comprendido entre un vértice y el lado opuesto.

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado Ortocentro.



Mediana es el segmento comprendido entre un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado Baricentro, que es el centro de gravedad del triángulo.

Construcción de triángulos

Para poder dibujar o construir un polígono basta con conocer algunos de sus elementos. Los diferentes casos que pueden plantearse para el triángulo son:

I. Conocidos los tres lados

II. Conocidos los tres ángulos (se pueden construir infinitos triángulos)

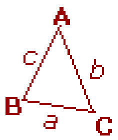
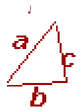
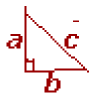
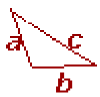
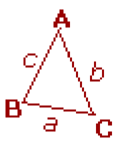
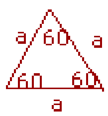
III. Conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (el tercer lado viene automáticamente determinado por situarse en los extremos de los otros dos)
IV. Conocido un lado y los dos ángulos contiguos

En la siguiente página web del proyecto Descartes tienes la posibilidad de construir diversos triángulos en los supuestos anteriores, así como la de comprobar experimentalmente las propiedades citadas más arriba.
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/1y2_eso/Triangulos/Triangu1.htm

Triángulos imposibles

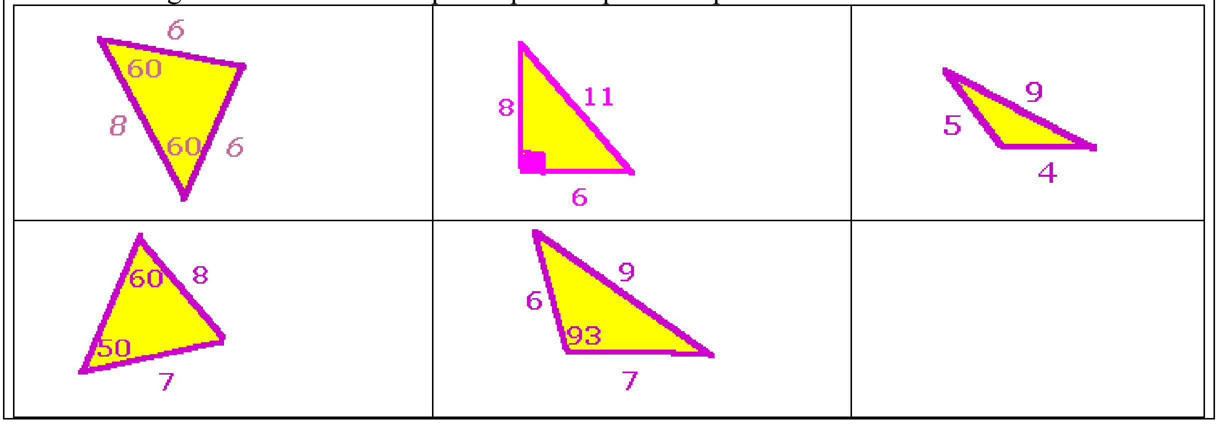
No todas las medidas de lados y ángulos son buenas para construir triángulos. Existen unas reglas que se deben cumplir para ello.

Reglas

	**1.** En **todo** triángulo se cumple: a + b > c b + c > a a + c > b
	**2.** En cualquier triángulo **acutángulo** se cumple: $c^2 < a^2 + b^2$.
	**3.** En todo triángulo **rectángulo** se cumple: $c^2 = a^2 + b^2$.
	**4.** En todo triángulo **obtusángulo** se cumple: $c^2 > a^2 + b^2$.
	**5.** En **cualquier** triángulo es cierto que, a < b, si y solo si **ángulo A < ángulo B**.
	**6.** Los tres lados de un triángulo son iguales si y solo si los tres ángulos lo son.

Ejercicio:

10. He aquí una serie de triángulos con unas medidas determinadas. Trata de construirlos. Señala cuál de las reglas anteriores no cumplen aquellos que no se puedan construir:



5. LOS CUADRILÁTEROS Y SU CLASIFICACIÓN

Después de los triángulos, los polígonos más sencillos, por tener menor número de lados, son los cuadriláteros. Todos conocemos dibujos de diversos tipos de cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, rombos, etc.) pero realizar clasificaciones de estos objetos geométricos no solo ayuda a entender mejor sus propiedades sino a establecer relaciones entre ellos. Para clasificar hay que estudiar las características comunes que tienen estas figuras, lo que dependerá a su vez de los criterios o variables que observemos:

- Paralelismo de lados
- Igualdad de lados
- Igualdad de ángulos
- Número de ángulos rectos
- Posición relativa de las diagonales
- Concavidad y convexidad

5.1. Situación introductoria: Clasificación de los cuadriláteros

Realiza un dibujo de cada uno de los cuadriláteros que conozcas y escribe el nombre. Da una definición de cada cuadrilátero y realiza una clasificación de ellos. Escribe el criterio utilizado para su clasificación. La figura 1 representa una clasificación de cuadriláteros.

- ¿Conoces algún cuadrilátero que no esté en esa clasificación?
- ¿Qué criterios crees que se han utilizado para hacer la clasificación?
- ¿Cómo interpretas las flechas que unen cada grupo de cuadriláteros?

Teniendo en cuenta las flechas dibujadas

- ¿Cómo definirías el rombo? ¿Y el cuadrado? ¿Se pueden definir de otra forma?
- ¿Qué cuadrilátero responde a la condición de "tener dos pares de lados *no consecutivos* iguales"?
- ¿Y si le pedimos que tenga dos pares de lados *consecutivos* iguales?

Haz un dibujo de uno de estos cuadriláteros a los que llamaremos ***cometas***. Sitúalo en el esquema de la figura 12.

- ¿Qué forma tienen los cuadriláteros que solamente tienen un par de lados consecutivos iguales? Añádelo al esquema de la figura 1 con el nombre de ***cometas oblicuos***.

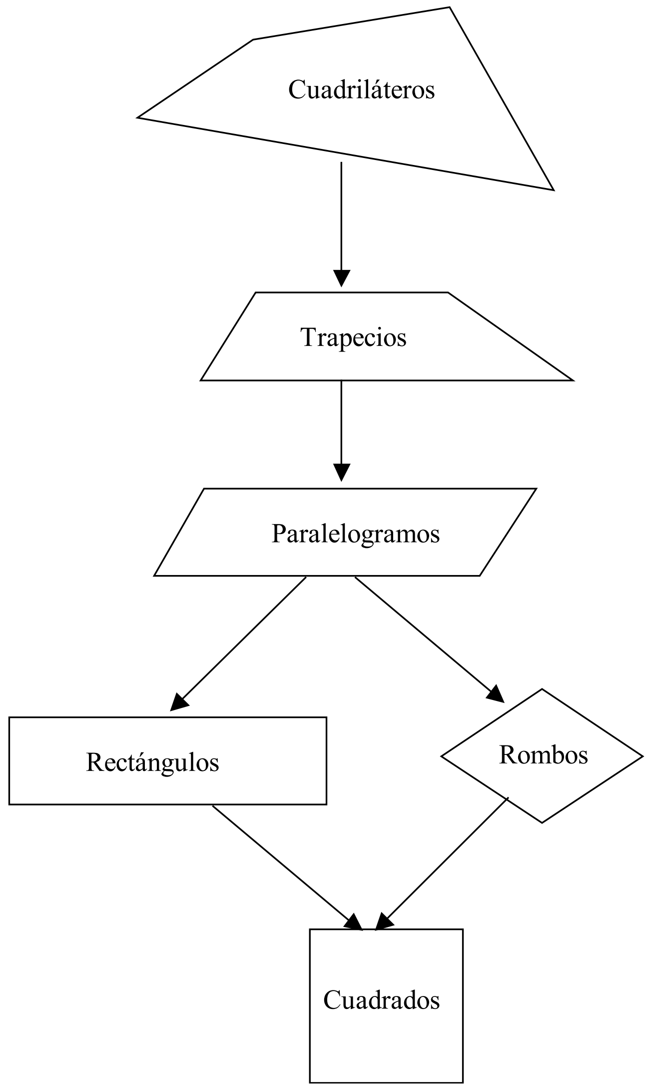


Figura 12: Clasificación de cuadriláteros

Si añadimos los cometas oblicuos y los cometas al esquema de la figura 12, obtendremos una clasificación más completa (figura 13). Observa la flecha que une las cometas con los rombos.

- ¿Qué relación encuentras entre estos dos tipos de cuadriláteros? ¿Cómo defines un rombo partiendo de una cometa?

Observa el paralelismo que existe entre trapecios y paralelogramos por una parte y cometas oblicuos y cometas por otra..

- ¿Qué hay que exigirle a un paralelogramo (romboide) para que se convierta en un rectángulo?

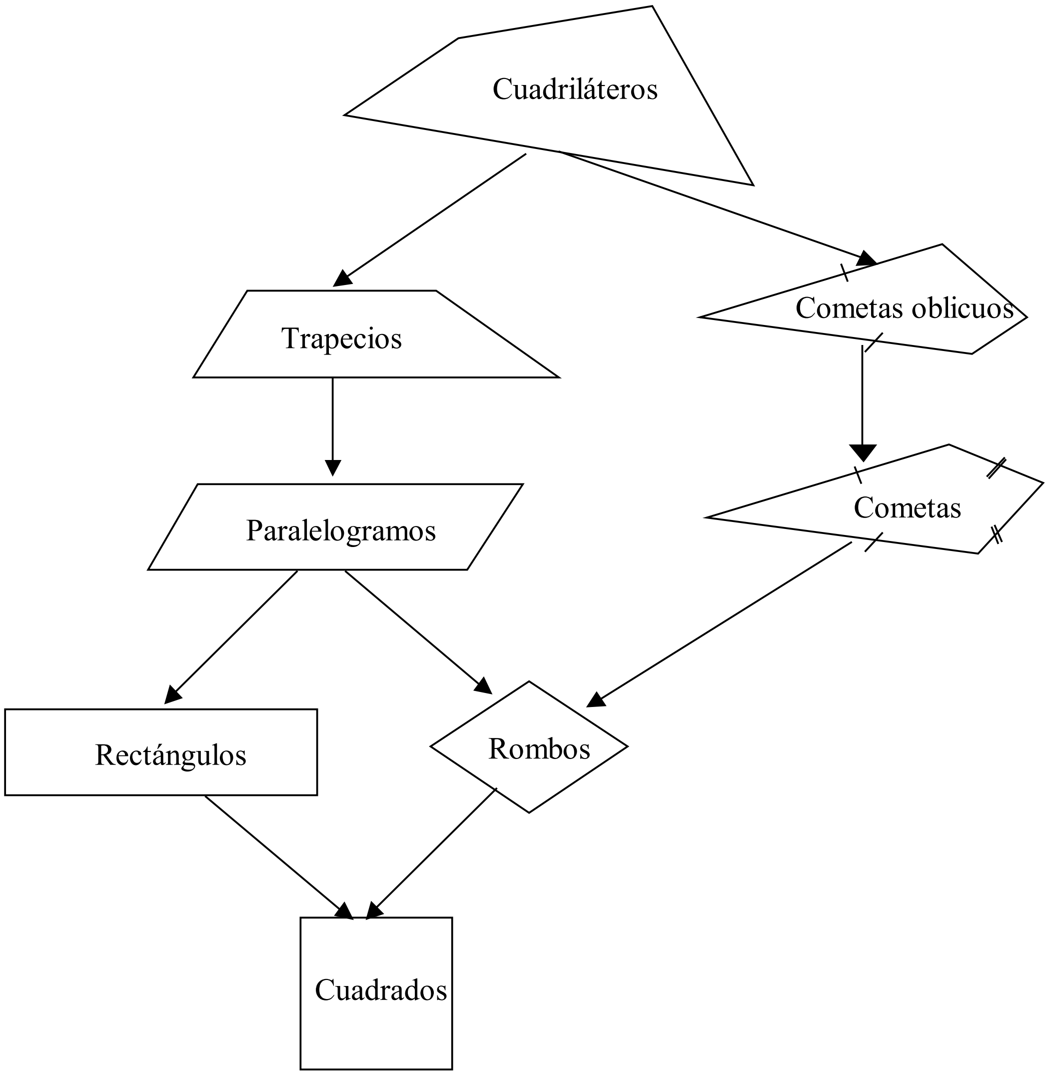


Figura 13: Cometas y cometas oblicuos

- ¿Cómo sería una cometa con uno, dos o tres, ángulos rectos? Llamemos a estos cuadriláteros ***cometas rectangulares***. Completa el diagrama de la figura 2 añadiendo estas nuevas cometas (figura 3).

Teniendo presente el diagrama de la figura 14:

- ¿Qué criterios se han utilizado para clasificar los cuadriláteros?
- ¿De cuántas formas podrías ahora definir un cuadrado?

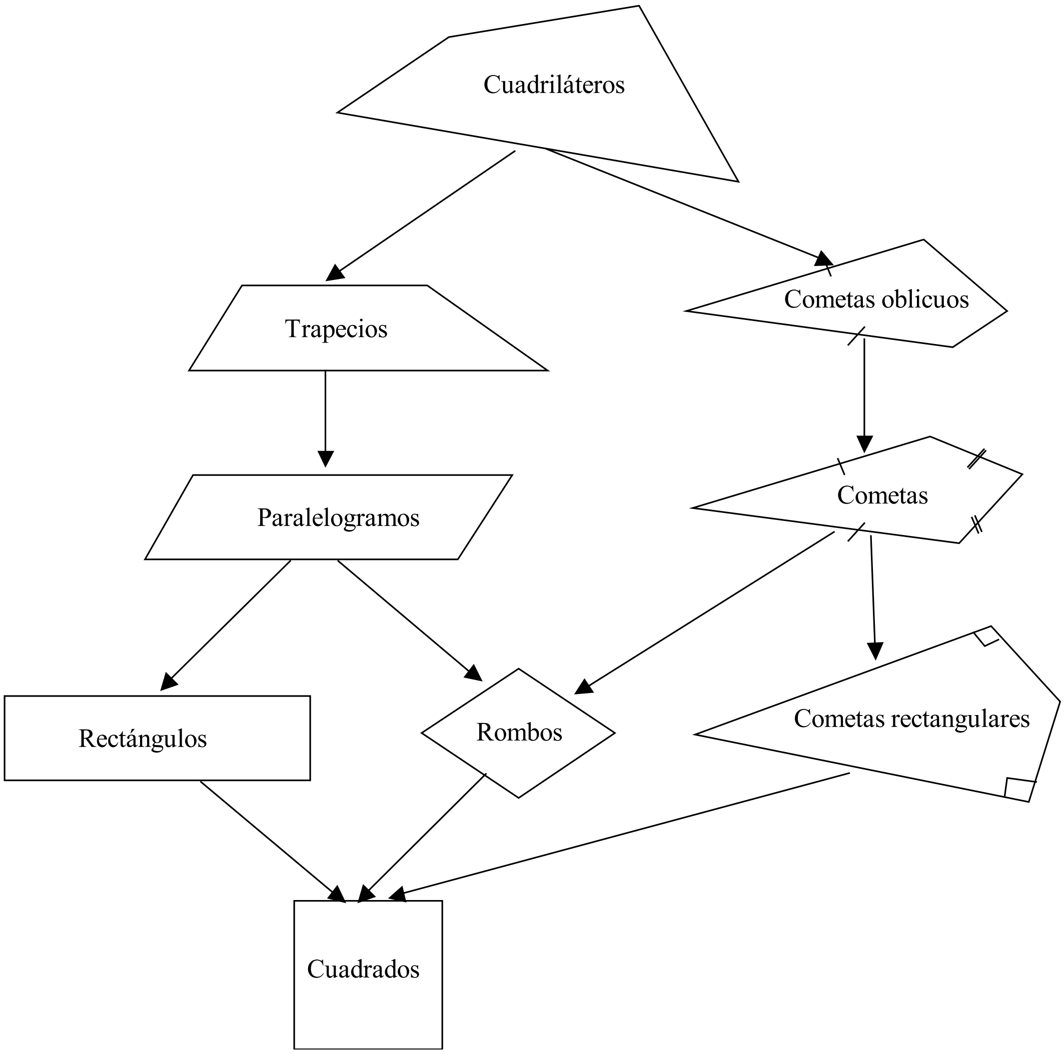


Figura 14: Clasificación de cuadriláteros

La figura 15 representa otra forma de clasificar los cuadriláteros. Observa las inclusiones e intersecciones de conjuntos de cuadriláteros. Añade los que falten siguiendo los criterios en cuanto a la forma de dibujar los contornos de los conjuntos, respetando la forma de cada conjunto de cuadriláteros.

Otra forma de clasificar los cuadriláteros es atendiendo a las diagonales (se cortan en el punto medio, son perpendiculares).

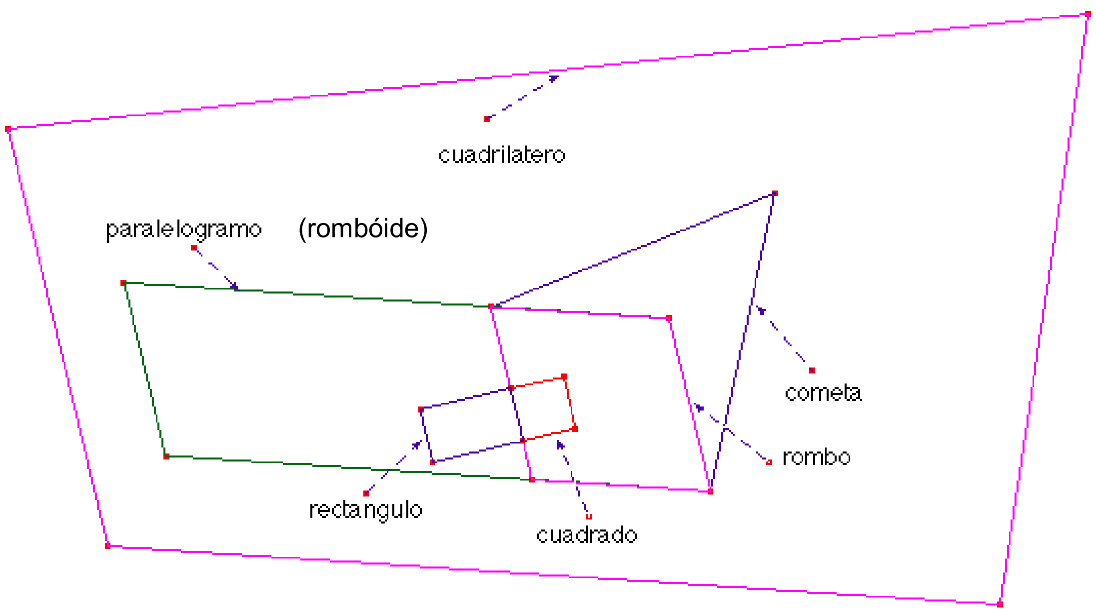


Figura 15: Clasificación figurada de cuadriláteros

5.2. Descripciones y propiedades de los cuadriláteros

Un *cuadrilátero* es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360º. Los paralelogramos son los cuadriláteros que tienen paralelos los dos pares de lados opuestos.

Entre las propiedades de los cuadriláteros que se derivan de las de los polígonos en general tenemos,

- La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a cuatro ángulos rectos.
- La suma de los ángulos exteriores es igual a cuatro rectos.
- Los cuadriláteros son los únicos polígonos para los cuales la suma de los ángulos exteriores es igual a la suma de los ángulos interiores.

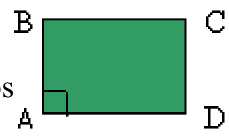
Propiedades de los paralelogramos:

En todo para1elogramo:

- los lados opuestos son congruentes.
- los ángulos opuestos son congruentes
- las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes

Rectángulo

Se llama rectángulo al paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos. El conjunto de los rectángulos está incluido en el conjunto de los paralelogramos.



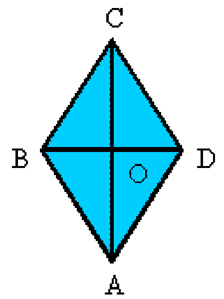
Propiedades del rectángulo:

El rectángulo tiene una propiedad que le es característica.

- Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

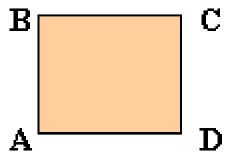
Rombo

Se llama rombo al paralelogramo que tiene sus cuatro lados congruentes.
La condición necesaria y suficiente para que un paralelogramo sea rombo es que tenga dos lados consecutivos congruentes.
El rombo tiene una propiedad que le es característica.
Las diagonales de un rombo son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen



Cuadrado

Se llama cuadrado al paralelogramo que tiene sus cuatros ángulos y sus cuatro lados congruentes.

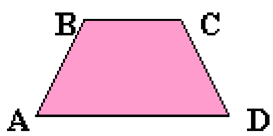


Cuadrado ABCD   AB = BC = CD = DA   A = B = C = D
El cuadrado es rectángulo y rombo a la vez

Propiedades del cuadrado
- Por ser el cuadrado un paralelogramo tiene las propiedades de los paralelogramos en general, es decir:
- Sus diagonales se cortan en partes congruentes.
- Por ser el cuadrado un caso particular del rectángulo, tiene las propiedades especiales de este último, es decir:
- Sus diagonales son congruentes.
- Por ser el cuadrado un caso particular del rombo tiene las propiedades especiales de este último, es decir:
  - Sus diagonales son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Trapecio y Trapezoides

Los cuadriláteros que no son paralelogramos se clasifican en trapecios y trapezoides.



Trapecio

Se llama trapecio al cuadrilátero que tiene únicamente dos lados opuestos paralelos.

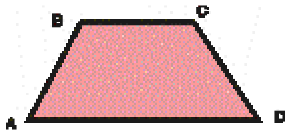
Así, el cuadrilátero de la figura es un trapecio, porque tiene paralelos únicamente los lados AD y BC.

Los lados paralelos se llaman bases del trapecio.
AD es la base mayor del trapecio; BC es la base menor del trapecio.

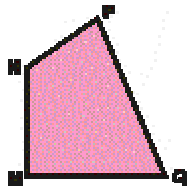
Clasificación de los trapecios

Cuando el trapecio tiene los lados no paralelos congruentes, se llama trapecio isósceles; en caso contrario, trapecio escaleno. Dentro de los trapecios escalenos, puede ocurrir que uno de los lados no paralelos sea perpendicular a las bases, y en tal caso se dice que el trapecio es rectángulo.

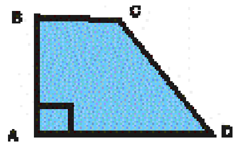
Trapecio isósceles



Trapecio escaleno



Trapecio escaleno rectángulo



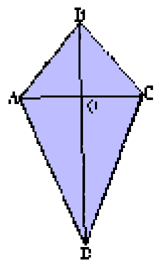
Trapezoide

Es el cuadrilátero que no tiene ningún par de lados paralelos.
El cuadrilátero MNPQ es un trapezoide, pues no tiene ningún par de lados paralelos.

Cometa

Se llama así al trapezoide que tiene dos lados consecutivos congruentes y los otros dos lados distintos de los anteriores, pero también congruentes entre sí.
El cuadrilátero ABCD de la figura es una cometa, por no tener lados paralelos y ser:

AB = BC
AD = CD



La diagonal de la cometa que une los vértice a que concurren los pares de lados congruentes se llama diagonal principal.
En la cometa considerada, BD es la diagonal principal.

Propiedad de la cometa: La diagonal principal de la cometa es bisectriz de los ángulos cuyos vértices une, y corta perpendicularmente a la otra diagonal en el punto medio.

Ejercicios

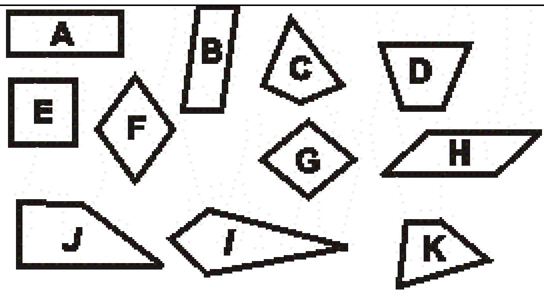
11. Subraya la respuesta correcta:

a) Las diagonales del rectángulo ...
  - Tienen igual medida.
  - No son perpendiculares.
  - Se cortan en el punto medio.

b) Los ángulos opuestos de un rombo son ...
  - De igual medida.
  - Distinta medida.

c) Cuadrilátero que tiene sus lados opuestos congruentes ...
  - Cuadrado.
  - Cometa.
  - Paralelogramo.

12. Clasifica los cuadriláteros siguientes:



Completa la tabla, colocando en cada columna la letra correspondiente al cuadrilátero que cumpla la condición indicada:

Con los lados paralelos		Sin lados paralelos
Un solo par	Dos pares	

13. Marca con una X las propiedades que cumplen las diagonales

	Trapecio	Romboide	Rombo	Paralelo-gramo	Rectángulo	Cuadrado
Son congruentes						
Son perpendiculares						
Una de ellas corta a la otra en punto medio						
Cortan mutuamente en el punto medio						

14. Completa la tabla siguiente:

Propiedad	Cuadrilátero(s) que cumple(n) dicha propiedad
Diagonales iguales	
Todos sus lados iguales	
Lados opuestos iguales	
Sus diagonales se cortan en el punto medio	
Diagonales perpendiculares	
Ángulos opuestos iguales	
Sus diagonales son bisectrices	
Una diagonal corta a la otra en su punto medio y viceversa	
Todos sus lados desiguales	
Sólo dos ángulos interiores congruentes	
La suma de sus ángulos exteriores es 360º	
Sin ángulos interiores congruentes	

6. RECUBRIMIENTOS DEL PLANO CON POLÍGONOS

El arte de los recubrimientos, o teselaciones, del plano mediante figuras poligonales tiene una historia tan antigua como la propia civilización. Diversos e imaginativos patrones han decorado las construcciones y objetos más diversos (muros, alfombras, ventanales, etc.). En tiempos recientes el interés por las teselaciones ha ido más allá de su interés puramente decorativo. Por ejemplo, en metalurgia y cristalografía interesa saber cómo se disponen de manera natural de una forma periódica. En arquitectura interesa conocer cómo se pueden combinar componentes estructurales simples para crear complejos constructivos más grandes, y los fabricantes de ordenadores esperan poder integrar los patrones de circuitos electrónicos simples para formar potentes procesadores, como son las redes neuronales. El análisis matemáticos de los patrones de recubrimientos es una respuesta a estas necesidades contemporáneas. Al mismo tiempo la creación y exploración de las teselaciones o recubrimientos del plano proporciona un contexto interesante para la investigación geométrica y la resolución de problemas en las clases de matemáticas de educación primaria y secundaria.

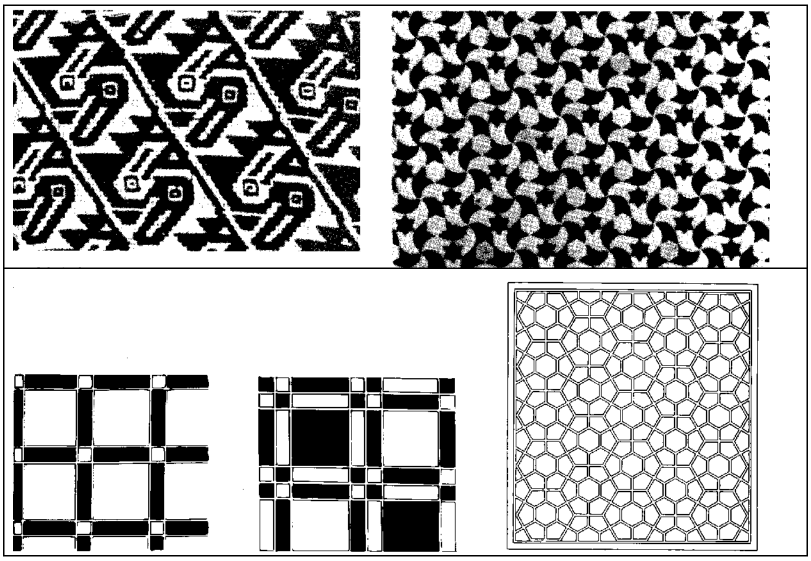


Fig. 16: Ejemplos de teselaciones

El diccionario de la Real Academia Española de la Lengua indica que la palabra tesela (del latín, **tessella**) significa "*Cada una de las piezas cúbicas de mármol, piedra, barro cocido o cualquier otra material, con que los antiguos formaban los pavimentos de mosaico*"

Desde un punto de vista matemático más general consideramos que una tesela es "cualquier curva cerrada simple, con su interior". Un conjunto de teselas forma una teselación de una figura si dicha figura está completamente cubierta por las teselas sin solapamientos de puntos interiores de dichas figuras.

El caso particular de recubrimientos del plano que nos interesa son los formados por polígonos; la figura que se recubre suele ser el plano completo.

6.1. Teselaciones poligonales del plano

¿Qué polígonos, por sí mismos, cubren el plano sin dejar huecos ni solapamientos? La respuesta a esta pregunta pasa por estudiar los ángulos de tales polígonos, y tratar de sumar con ellos 360º en torno a un vértice. Empecemos por el triángulo. Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es de 180º. Dibujemos un triángulo en el que marcamos los ángulos con 1, 2 y 3, y hagamos suficientes copias de él. La experiencia consiste en recortar dichos triángulos y colocarlos de forma que, en torno a un vértice, obtengamos 360º para cubrir el plano sin dejar huecos ni solapamientos.

Tres de ellos los podemos unir colocando en torno a un vértice cada uno de los tres ángulos del triángulo, que sabemos suman 180º y repetirlo dos veces (Fig. 17)

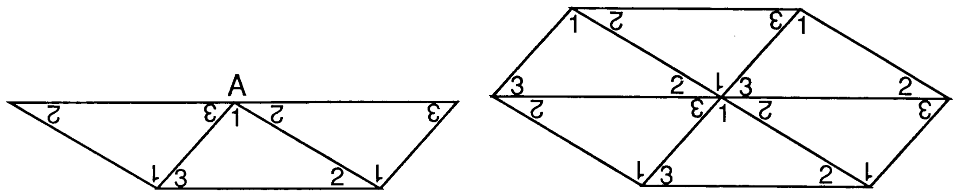


Fig. 17:

Repitiendo el proceso se consigue una teselación triangular (Fig. 18).

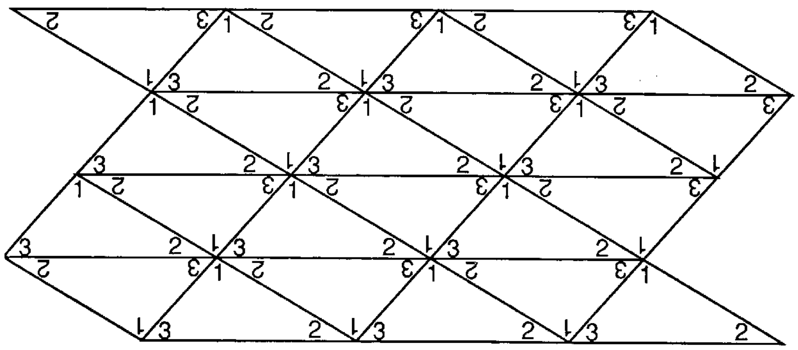


Fig. 18:

Ejercicio:

15. Repite el proceso anterior con un cuadrilátero cualquiera (trapezoide), marca los ángulos y comprueba si cualquier cuadrilátero tesela por sí mismo el plano.

¿Qué ocurre con el pentágono? Dibujemos un pentágono cualquiera. Después de marcar los ángulos y recortarlo, coloquemos los ángulos de manera contigua, como indica la figura 19. Veremos que no es posible obtener 360º en torno a un vértice.

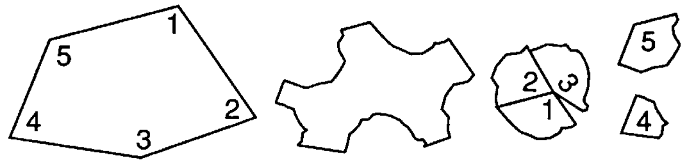


Fig. 19:

¿Le ocurre lo mismo a

todos los pentágonos? ¿Qué ocurre con el pentágono regular? El ángulo interior vale 108º, y por tanto no podemos conseguir 360º. ¿Significa esto que no existen teselaciones pentagonales? La figura20 nos sacará de dudas.

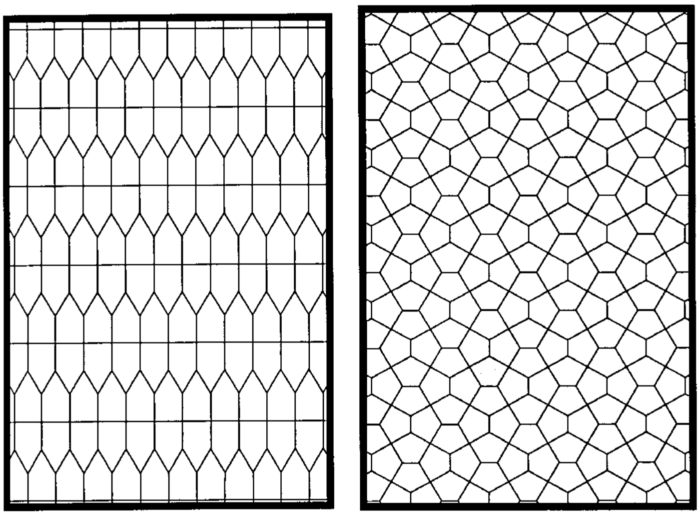


Fig. 20: Teselaciones pentagonales (no regulares)

Una forma de obtener hexágonos es uniendo dos cuadriláteros. Sabemos que los cuadriláteros sí teselan el plano por sí mismos. Partiendo de una teselación de cuadriláteros, podemos remarcar parejas de cuadriláteros contiguos y borrar el lado común (Fig. 21).

Podemos comprobar así que estos hexágonos especiales, obtenidos uniendo dos cuadriláteros, también teselan el plano.

¿Qué características tienen estos hexágonos? ¿Qué ocurre con el caso del hexágono regular? Dado que el ángulo interior de un hexágono regular es de 120º, con tres de ellos podemos obtener 360º alrededor de un vértice. A este tipo de teselaciones con un solo tipo de polígonos regulares se les llama teselaciones regulares.

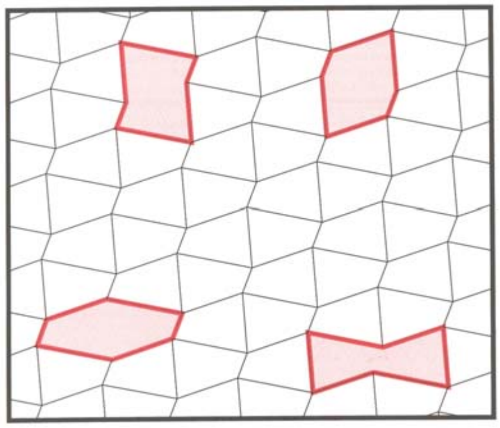


Fig. 21: Teselación de cuadriláteros

Ejercicio:

16. Investiga otras teselaciones regulares distintas de las descritas.

6.2. Teselaciones semirregulares

Si utilizamos diversos tipos de polígonos regulares, podemos indagar las combinaciones de ellos que producen un cubrimiento del plano. Para ello debemos conocer los ángulos interiores de algunos polígonos regulares, valores que tienes en la tabla siguiente:

Polígono	Nºde lados	Ángulo interior
Triángulo	3	60
Cuadrado	4	90
Pentágono reg.	5	108
Hexágono reg.	6	120
Heptágono reg.	7	128 4/7
Octógono reg.	8	135
Nonágono reg.	9	140
Decágono reg.	10	144
Dodecágono reg.	12	150
Pentadecágono reg.	15	156
Octadecágono reg.	18	160
Icógono	20	152

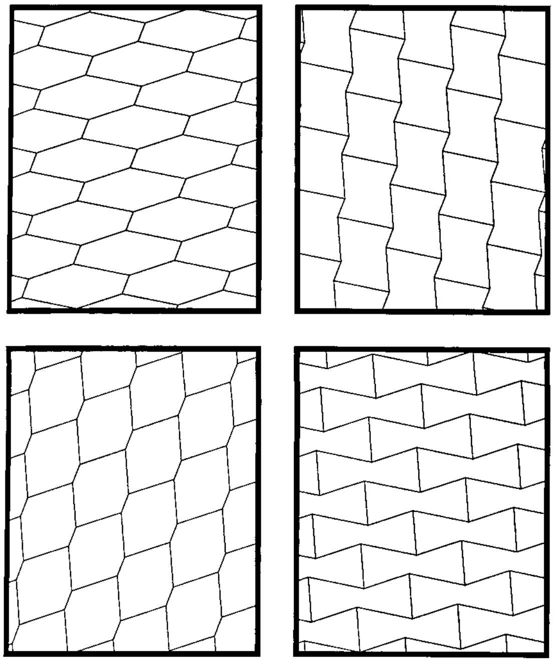


Fig. 22: Teselación de hexágonos formados con dos cuadriláteros

Algunas de esas combinaciones dan lugar a teselaciones con todos los vértices iguales. Esas teselaciones les llamamos semirregulares, y son 8 (Fig. 23). Las series de números puestos debajo de cada figura indican el orden de colocación de los distintos polígonos (3.3.3.4.4, quiere decir que se unen tres triángulos seguidos y a continuación dos cuadrados)

En cambio existen otras combinaciones de polígonos regulares que cubren el plano pero no producen vértices idénticos. Algunas de esas combinaciones están en la figura 24.

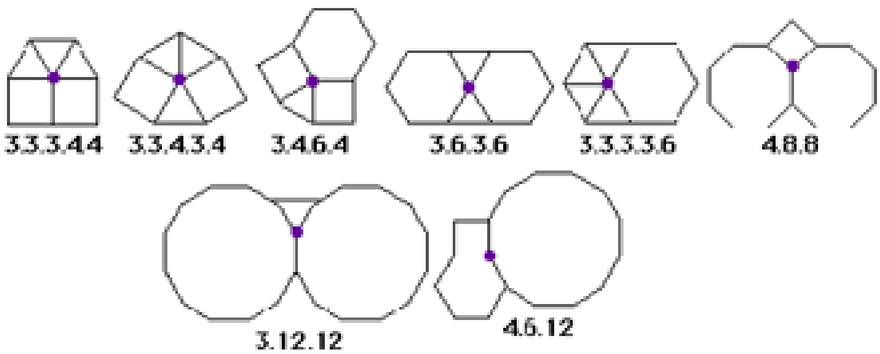


Fig. 23.Combinaciones de polígonos regulares que originan teselaciones semirregulares

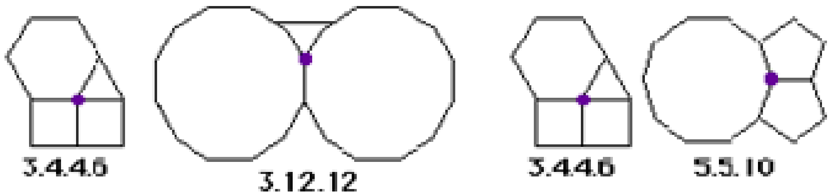


Fig.24. Combinaciones de polígonos regulares que NO originan teselaciones semirregulares

Un recubrimiento del plano formado por más de un tipo de polígono regular y con idénticos vértices de figura se dice que es un recubrimiento semirregular. Esta condición adicional sobre los vértices de figura supone que los mismos tipos de polígonos deben concurrir en cada vértice, y deben ocurrir en el mismo orden.

Se puede demostrar que existen 18 modos de formar vértices de figuras con polígonos regulares de dos o más tipos. De estas 18 formas, ocho corresponden a teselaciones semiregulares, que son las indicadas en la figura 25.

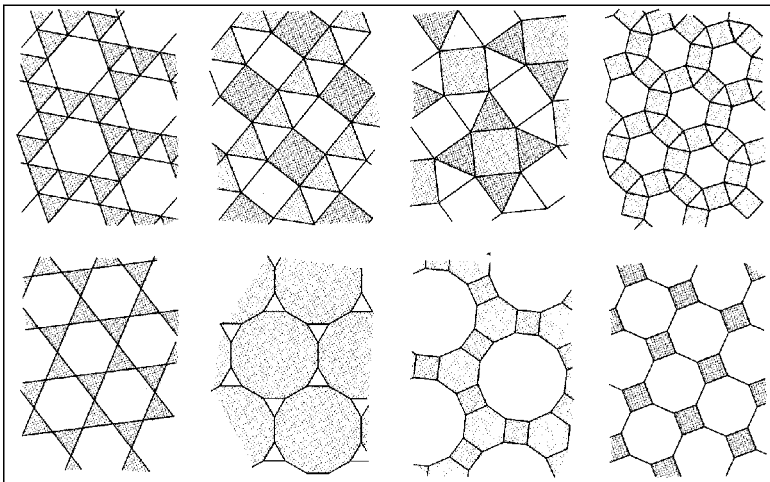
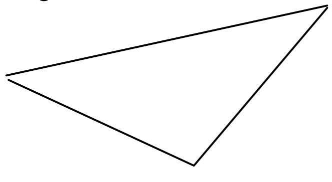


Fig. 25: Las ochos teselaciones semiregulares

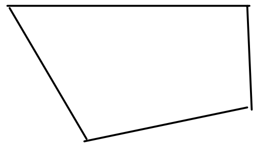
Ejercicio:

17. ¿Cuáles de los siguientes polígonos recubren el plano? (Reproduce en cartulina las figuras y experimenta con ellas)

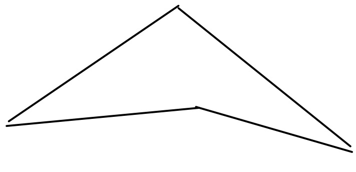
(a) Triángulo escaleno:



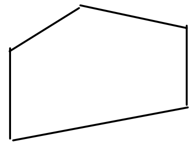
(b) Cuadrilátero convexo:



(c) Cuadrilátero no convexo



(d) Pentágono con un par de lados parelelos:



7. FIGURAS EN EL ESPACIO

7.1 Planos y líneas en el espacio

Cada plano separa los puntos del espacio en tres conjuntos disjuntos: el propio plano y dos regiones llamados *semiespacios*. Dos planos en el espacio pueden tener una interección común, que será una recta, o bien ser disjuntos, en cuyo caso se dice que son *paralelos*. El ángulo formado por dos planos que se cortan se llama *ángulo diedro*. La medida de dicho ángulo es la correspondiente al ángulo formado por dos semirectas contenidas en los semiplanos que lo forman y que sean perpendiculares a la recta de intersección correspondiente.

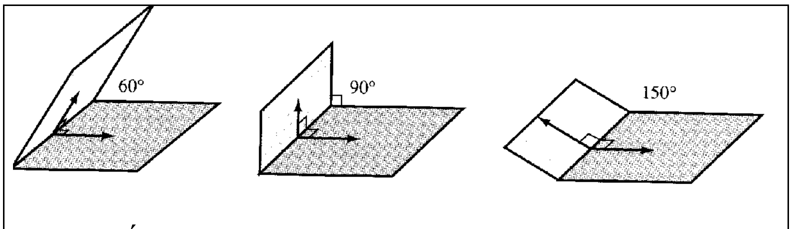


Fig. 26: Ángulos diedros y sus medidas

Dos líneas que no se cortan en el espacio se dice que son paralelas si están contenidas en el mismo plano; si no están en el mismo plano se dice que se cruzan. Una línea *l* que no corta a un plano P se dice que es paralela al plano. Una línea *m* es perpendicular a un plano Q en el punto A si cada línea del plano que pasa por A forma con *m* un ángulo recto.

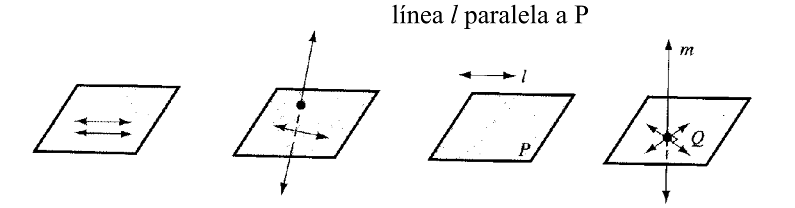


Fig. 27 : Líneas y planos en el espacio

7.2. Curvas, superficies y sólidos

El concepto intuitivo de curva se puede extender del plano al espacio imaginando figuras dibujadas por un lápiz "mágico" cuyos puntos dejan un trazo visible en el aire.

Cualquier superficie sin agujeros y que encierra una región hueca -su interior- se dice que es una *superficie cerrada simple*.

La unión de todos los puntos de una superficie cerrada simple y todos los puntos de su interior forman una figura espacial llamada un *sólido*.

Una superficie cerrada simple es *convexa* si el segmento que une cualquier par de puntos de la superficie está contenido en el interior de dicha superficie; esto es, el sólido limitado por la superficie es un conjunto convexo en el espacio. Por ejemplo, la esfera, que es el conjunto de puntos situados a una distancia constante de un punto fijo (el centro), es convexa.

7.3. Los poliedros y su clasificación

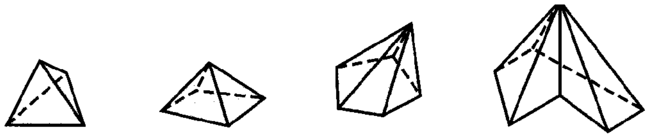
En la Naturaleza existen objetos con formas poliédricas. Por ejemplo, en cristalografía (cristales), biología (virus, radiolarios), las colmenas de las abejas en forma de rombododecaedros, con la fachada hecha de celdillas hexagonales, etc. También encontramos poliedros en obras y actividades realizadas por el hombre, como en el Arte, Arquitectura, Escultura, Artesanía, ... Los poliedros fueron estudiados por filósofos y matemáticos célebres como Platón, Euclides, Arquímedes, Kepler, Poincaré, Hilbert, Coxeter, ...

Definición:

Un poliedro es el sólido delimitado por una superficie cerrada simple formada por regiones poligonales planas. Cada región poligonal se dice que es una cara del poliedro, y los vértices y lados de las regiones poligonales se dicen que son los vértices y lados del poliedro.

En las figura 28 se muestran tipos de *pirámides* y *primas* que son ejemplos de poliedros.

Pirámides:



Prismas rectos y oblicuos:

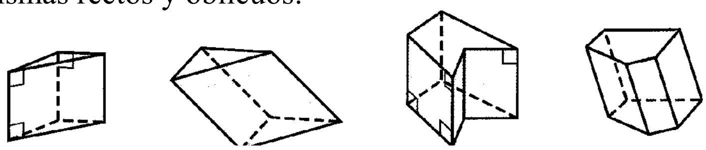


Fig. 28

Ejercicio:

18. Imagínate un prisma hexagonal regular recto.
a) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos diedros formados por las caras que se cortan?
b) ¿Cuántos pares de planos paralelos contienen a las caras de este prisma?

Para clasificar los poliedros podemos atender a diversos criterios, como por ejemplo, la regularidad y número de caras que concurren en los vértices.Otros criterios de clasificación de los poliedros son:

- Inclinación (rectos y oblicuos)
- Poliedros con bases (con una base, o varias bases)
- Según la construcción del modelo
    - Con polígonos regulares (Poliedros regulares, semirregulares, deltaedros)
    - Con polígonos iguales (Poliedros de caras iguales: Poliedros regulares, deltaedros, bipirámides de base regular)
    - Con vértices iguales (Poliedros. regulares, semirregulares, prismas rectos de base regular, ...)
- Combinaciones de distintos criterios
- Ejes y planos de simetría, diagonales, ángulos.

7.3.1. Poliedros regulares:

Un poliedro regular es un poliedro con las siguientes características:
- la superficie es convexa;
- las caras son regiones poligonales regulares congruentes;
- concurren el mismo número de caras en cada uno de los vértices.

La suma de los ángulos interiores de los polígonos que forman las caras de un poliedro regular que concurren en un mismo vértice debe ser menor de 360º, de lo contrario no podrían cerrar un espacio interior. Los ángulos interiores del triángulo equilátero miden 60º; por tanto, podemos formar poliedros regulares cuyas caras son triángulos cuando ponemos 3, 4 o 5 de tales triángulos concurriendo en cada vértice, ya que la suma de sus ángulos cumple la condición indicada. Esos poliedros son el *tetraedro*, el *cubo* y el *icosaedro*.

Con caras que sean cuadrados sólo se puede formar el *hexaedro* o *cubo*, en el que concurren 3 cuadrados en cada vértice. Si utilizamos pentágonos regulares como caras de un poliedro se obtiene el *dodecaedro*.

Ejercicio:

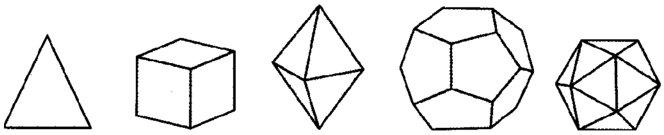
19. Completa el cuadro adjunto y responde a las siguientes cuestiones:

Tipo de caras (ángulo interior)	nº de caras por vértice	Suma de los ángulos en cada vértice	Símbolo del poliedro	nº de caras	nº de vértices	nº de aristas	C+V-A	Nombre
Triángulo equilátero (60º)	3	180º	{3,3,3}	4	4	6	2	Tetraedro
	4							
	5							
	6							
Cuadrado (90º)	3							
	4	360º						Cubo
Pentágono (108º)	3							
	4							
Hexágono (120º)	3							

a) ¿Cómo varía el ángulo de los polígonos regulares a medida que aumenta el número de lados?
b) ¿Podrías formar un poliedro uniendo 4 cuadrados por cada vértice? ¿Por qué?
c) ¿Qué condición crees que se debe exigir a este proceso para poder obtener un poliedro regular?
d) ¿Qué ocurre en el caso de los hexágonos regulares?
e) ¿Puede existir un poliedro regular formado solamente con hexágonos regulares? ¿Y con heptágonos regulares? ¿Por qué?
f) ¿Cómo es en cada caso la columna que mide C+V-A (nº de caras +nº de vértices menos el de aristas)? ese número constante se llama característica de Euler. Calcula ese número para otros poliedros que conozcas que no sean regulares. ¿Qué obtienes?

Ejercicio:

20. Demuestra que sólo existen cinco poliedros regulares basándote en la suma de los ángulos de las caras que concurren en los vértices.



La fórmula de Euler para los poliedros:

Teorema:
En cualquier poliedro se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más 2.

Ejercicio:

21. Comprueba que el teorema de la fórmula de Euler es cierto para los poliedros regulares, para una pirámide pentagonal y un prisma hexagonal.

Utilizando el teorema de Euler, vamos a demostrar que *solo existen 5 poliedros regulares convexos.*
Llamemos:

C = nº de caras de n lados (n> 2)
V = nº de vértices de orden m (m>2)
A = nº de aristas

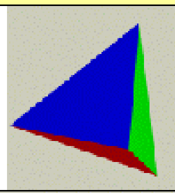
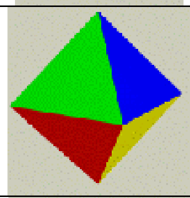
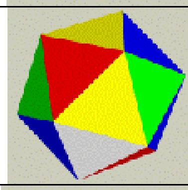
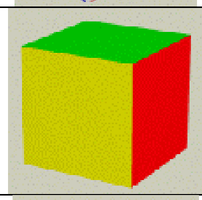
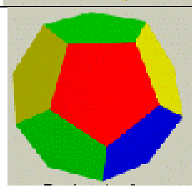
Debido al teorema de Euler se cumple
(1) C + V – A = 2;
El número de aristas A lo podemos expresar de dos formas, en función de las caras C y de los vértices V:

(2) $A = \frac{nC}{2}$ (cada arista pertenece a 2 caras)

$A = \frac{mV}{2}$ (cada arista une 2 vértices)

Sustituyendo (1): $\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} - A = 2 \Rightarrow$ 2mA + 2nA –mnA =2mn;
Sacando factor común y operando:
A (2m + 2n –mn) = 2mn ;
2m + 2n –mn>0 por ser A>0 y 2mn>0
2m + 2n –mn –4 > -4 $\Rightarrow$ -(m-2)(n-2) > -4;
(m-2)(n-2) < 4

Dando valores enteros a n y m (con n >2; m>2):

n	M	Resultados en **(m-2)(n-2) < 4**	Poliedro (nº de polígonos por vértice)	Figura
3	3	$1(m-2) < 4;\ m<6$ $m = 3, 4, 5$	**Tetraedro** (3 triángulos)	
	4		**Octaedro** (4 triángulos)	
	5		**Icosaedro** (5 triángulos)	
4	3	$2(m-2)<4 \Rightarrow m<4 \Rightarrow m=3$	Cubo (3 cuadrados)	
5	3	$3(m-2)<4 \Rightarrow m<4/3 + 2=10/3 \Rightarrow m=3$	**Dodecaedro** (3 pentágonos)	
6		$(m-2)4<4 \Rightarrow 4m<12 \Rightarrow m<3$	**no existe**	

Vemos que para 6 o más caras por vértice obtenemos que debe ser m<3, es decir, el número de vértices por cara es menor que 3, lo que no es posible, ya que 3 es el número mínimo de vértices de una cara.

7.3.2. Dualidad de poliedros

Compara el número de caras del cubo con el número de vértices del octaedro. Vemos que coinciden. Es decir, si intercambiamos caras por vértices, obtenemos los mismos datos numéricos, ya que el número de aristas es el mismo en ambos poliedros. Si encajamos un poliedro en el otro (Fig. 29) vemos que los vértices de uno se sitúan en los centros de las caras del otro. Estos dos poliedros, que pertenecen a la misma familia, se dicen que son duales.

Ejercicio:

22. Observa la tabla anterior y obtén otros pares de poliedros duales.

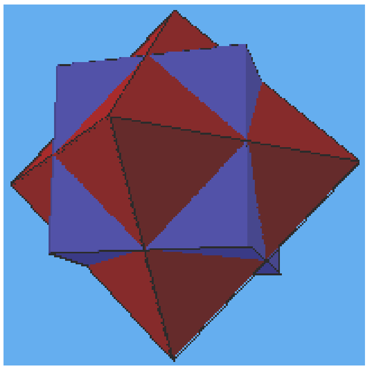


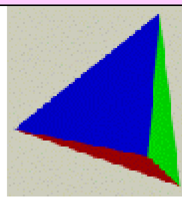
Fig. 29: Cubo y octaedro. Dos poliedros duales

7.3.3. Deltaedros

La letra griega *delta* mayúscula (Δ) recuerda la forma de los triángulos, por ello se le da el nombre de deltaedros a los poliedros que se forman solamente con caras triangulares. Si los triángulos son equiláteros se dice que el deltaedro es regular.

Ejercicios:

23. Identifica los **deltaedros regulares** que ya conozcas.
Ayúdate de troqueles de cartulina de triángulos equiláteros para construir deltaedros convexos, completa la tabla y responde a las siguientes preguntas:

Caras	Vértices	Aristas	Orden de los vértices				Nombre	Figura
			3	4	5	6		
4	4	6	4	0	0	0	Tetraedro	
5								
6	5	9	2	3	0	0	Bipirámide triangular	
7								
8								
9								
10								
11								
12								

¿Existen deltaedros convexos con un número impar de caras?
¿Existen deltaedros convexos con más de 20 de caras?
¿Existe un deltaedro convexo con 18 caras?
¿Has desarrollado algún procedimiento para construir un deltaedro partiendo del inmediato anterior?

7.3.4. Poliedros semirregulares o Arquimedianos

Los poliedros regulares cumplen las tres condiciones de regularidad (caras regulares e iguales y vértices iguales). Si prescindimos de la condición de igualdad de caras, los poliedros resultantes tienen un grado menor de regularidad, y se llaman semirregulares o arquimedianos (en honor de Arquímedes).

Ejercicio:
24 ¿Conoces algún poliedro semirregular? ¿Puedes imaginar un prisma que sea semirregular?

Existen solamente 13 de ellos (además de los infinitos prismas y antiprismas que son semirregulares). Un método para conseguir algunos de estos poliedros partiendo de los poliedros regulares es mediante el proceso de truncamiento.

Un tipo de truncamiento consiste en cortar las aristas que concurren en cada vértice por un plano de manera que la sección producida sea un polígono regular cuyo lado sea de la misma longitud que el resto de las aristas. Así, por ejemplo, al truncar el tetraedro de esta manera se obtienen triángulos de cada vértice y hexágonos de cada una de las caras (Fig. 30).

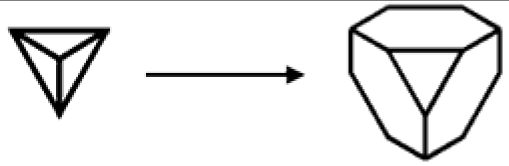


Fig. 30: Del tetraedro se obtiene el tetraedro truncado

Ejercicio:
25. ¿Qué poliedro obtenemos si cortamos las aristas del tetraedro por sus puntos medios?

Este mismo proceso lo podemos hacer con el cubo. Se obtienen triángulos equiláteros de cada vértice y octógonos de cada cara.

Ejercicio:
26. ¿Qué poliedro obtenemos si cortamos las aristas del cubo por sus puntos medios? Y si hacemos ese proceso con el octaedro?

Fíjate en la figura 31 y comprueba cómo se obtiene un poliedro, el cuboctaedro, igualmente del cubo que del octaedro.

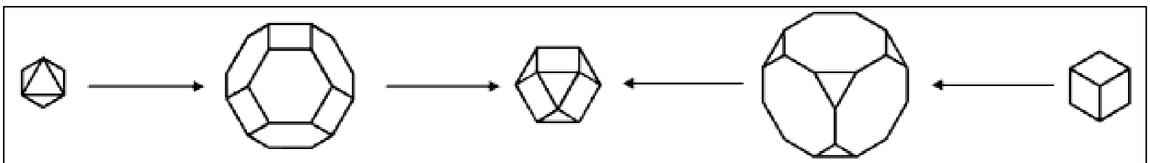


Fig.31: Partiendo del cubo y del octaedro se obtienen el cubo truncado, el octaedro truncado y el cuboctaedro.

En la figura 32 puedes ver unos modelos de poliedros semirregulares obtenidos del truncamiento de poliedros regulares, y en la figura 33 puedes contemplar toda la colección de los 13 poliedros arquimedianos.

Figura 32

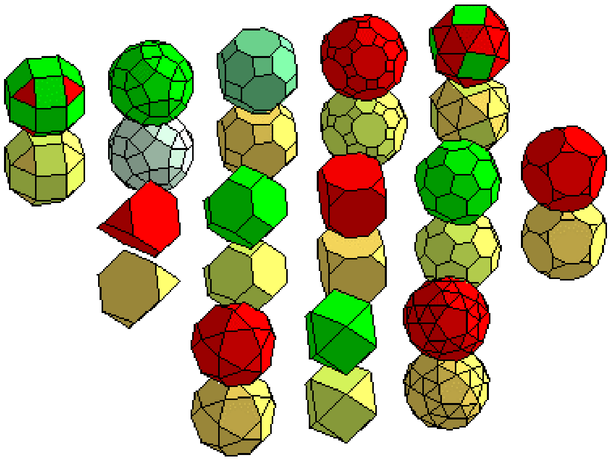
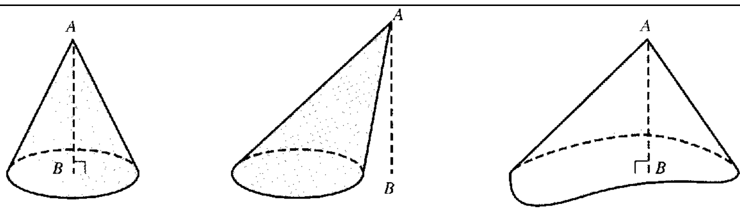


Fig. 33. Poliedros semirregulares

7.4. Conos y cilindros

Los conos y los cilindros son sólidos o cuerpos geométricos que generalizan las pirámides y los prismas, respectivamente. Un *cono* tiene una base que es cualquier región limitada por una curva cerrada simple contenida en un plano. La *superficie lateral* está generada por los segmentos que unen un punto fijo (el *vértice*) no situado en el plano de la base con los puntos de la curva que delimita la base. La figura 34 muestra un cono circular recto, oblicuo y un cono general. La altura del cono es el segmento AB que une el vértice A del cono y un punto B de la base de manera que AB es perpendicular al plano que contiene la base.



Cono circular recto   Cono circular oblicuo   Cono general

Fig. 34: Conos

Un *cilindro* es el sólido cuya superficie se genera trasladando los puntos de una región cerrada simple contenida en un plano hacia un plano paralelo. La figura 35 muestra ejemplos de cilindros. Los puntos que unen puntos correspondientes en las curvas que limitan las bases formal la *superficie lateral*. Si los segmentos que unen puntos correspondientes en las dos bases son perpendiculares a los planos de las bases se dice que el cilindro es *recto*, en caso contrario se trata de un cilindro *oblicuo*.

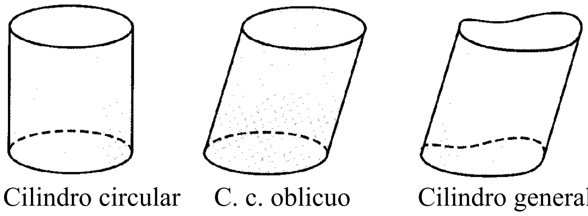
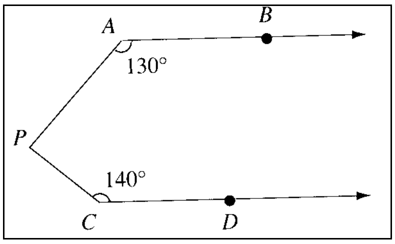


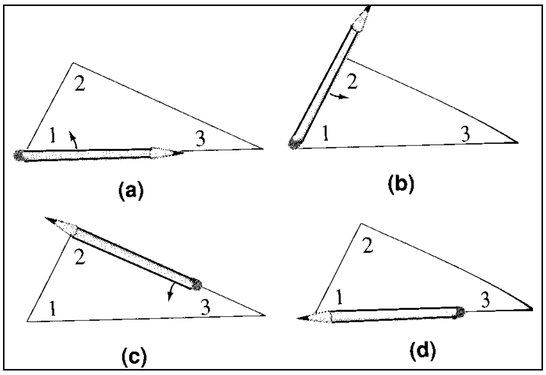
Figura 35. Cilindros

8. TALLER MATEMÁTICO

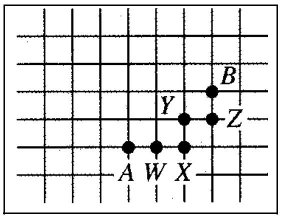
1. Determinar la medida del $\angle$P si las rectas AB y CD son paralelas.



2. ¿Qué proposición se está demostrando en la siguiente secuencia de dibujos? Explícalo con un breve párrafo.



3. En la llamada “geometría del taxi” (taxi-geometría) los “puntos” son los vértices de una rejilla cuadrangular que representa en el plano los “bloques de la ciudad” . En la figura adjunta el viaje más corto para ir de A a B debe recorrer 5 bloques, y por esto la “taxi-distancia” de A a B es 5. Un “taxi-segmento” es el conjunto de puntos situados sobre un trayecto de mínima distancia desde A hasta B, por lo que {A, W, X, Y, Z, B} es un taxi-segmento de A a B.



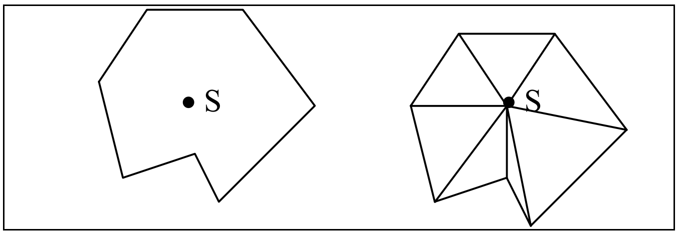
a) ¿Cuántos taxi-segmentos unen A y B?
b) Encontrar todos los puntos que están a una taxi-distancia de 5 desde A. ¿Se parecen los “taxi-círculos” a los círculos trazados con el compás?
c) Utilizar lápices de diferentes colores para dibujar los taxi-círculos concéntricos de radios 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Describir el patrón que aparece.

4. Resuelve los siguientes ejercicios sobre medidas de los lados y ángulos en los cuadriláteros:
1. En un trapecio rectángulo la medida de uno de sus ángulos interiores es 58º. ¿Cuánto miden los otros ángulos interiores?
2. En un romboide la medida de uno de sus ángulos exteriores es 137º. Determina la medida de todos los ángulos interiores de ese romboide.
3. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado cuya diagonal mide 12 cm.?
4. Determina la diagonal del rectángulo cuyos lados miden 5 cm. y 12 cm.
5. Determina la suma de las diagonales del cuadrado cuyo lado mide 8 cm.
6. Señala el tipo de triángulo que se determina al trazar las diagonales de un cuadrado.
7. En un rombo, una diagonal es el doble de la otra. Determina el perímetro del rombo sabiendo que la diagonal menor mide 6 cm.
8. Dos cuadrados de 80 cm. de perímetro se unen de manera que forman un rectángulo. Determina la medida de la diagonal del rectángulo formado.

5. Dibujar figuras que satisfagan las siguientes condiciones:
a) Una curva cerrada no simple poligonal de 4 lados
b) Un pentágono no convexo
c) Un cuadrilátero equiángulo
d) Un octógono convexo

6. La media aritmética de la medida de los ángulos interiores de polígono de n lados es de 175º.
a) ¿Cuántos lados tiene)
b) Supongamos que el polígono tiene uniones flexibles en los vértices. Si el polígono se deforma de manera rígida, ¿qué ocurre con la medida media de los ángulos interiores? Explica tu razonamiento.

7. El polígono de la izquierda de la figura adjunta contiene un punto S en su interior que se puede unir a los vértices mediante segmentos interiores al polígono. Al trazar todos estos segmentos obtenemos una triangulación del interior del polígono. Trazando un punto S en el interior de un polígono de n lados, explicar cómo usar la triangulación que se obtiene para deducir la fórmula (n-2).180º para la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono.



8.Un espacio unidimensional está formado por los puntos de una única recta. Si quitamos un punto de la recta se forman dos partes disjuntas, y al quitar dos puntos se forman tres partes disjuntas de la recta. En un espacio de dos dimensiones (un plano), si suprimimos una recta se obtienen dos regiones disjuntas (semiplanos). Al suprimir dos líneas no paralelas el plano queda dividido en cuatro regiones disjuntas.

	Número de puntos suprimidos de la recta o número de líneas suprimidas del plano									
	0	1	2	3	4	5	6	7	....	n
Número de partes de la recta que se forman	1	2	3							
Número de partes del plano que se forman	1	2	4							

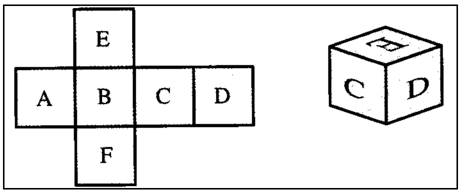
a) Completar la primera fila de la tabla.
b) Trazar tres, cuatro o cinco rectas en el plano que tengan una posición general, de manera que ningún par de líneas sean paralelas, ni tres líneas sean concurrentes. Contar el número de regiones que determinan y completar las tres casillas siguientes en la segunda fila de la tabla.
c) Encontrar cuántas regiones se forman a partir de diez rectas en una posición general (tratar de encontrar un patrón en la tabla)
d) Encontrar una fórmula para el número de regiones que determinan n líneas en posición general.

9. Un tetraminó es una tesela formada uniendo cuatro cuadrados congruentes, de manera que los cuadrados adyacentes deben tener un lado común.
a) Formar los cinco tetraminós con formas diferentes.
b) ¿Se puede recubrir un rectángulo de 4 por 5 con los cinco tetraminós?

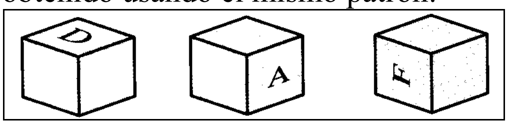
10. Recortar en cartulina varias copias de un hexágono convexo no regular que tenga cada par de lados opuestos congruentes y paralelos.
a) ¿Se puede recubrir el plano con estas teselas? ¿Es necesario rotar el hexágono para ponerlo en las posiciones sucesivas?
b) Repetir la actividad anterior pero tomando un hexágono convexo con sólo un par de lados opuestos que sean congruentes y paralelos.

11. Para cualquier entero n, $n \geq 3$, demostrar que existe algún polígono de n lados que recubre el plano.

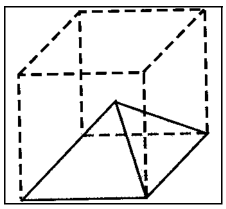
12. El patrón dibujado en la parte izquierda de la figura permite construir el cubo de la derecha.



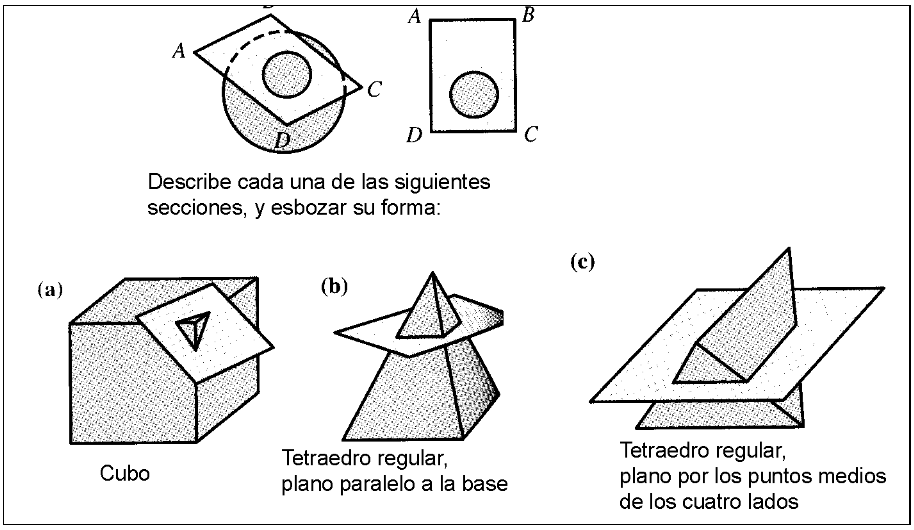
Dibujar la letra, en su posición correcta, que debe aparecer en cada una de las caras del cubo que se muestra que ha sido obtenido usando el mismo patrón:



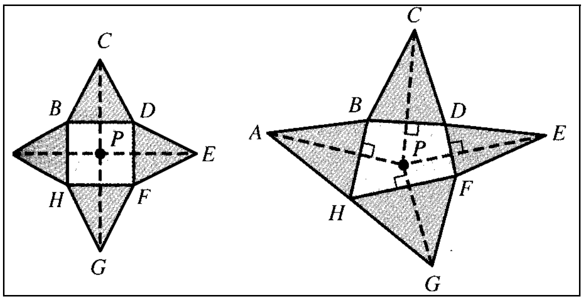
13. El vértice de la pirámide que muestra en la figura adjunta está en el centro del cubo trazado en líneas de puntos. ¿Cuál es el ángulo diedro que forma cada cara lateral de la pirámide con (a) la base cuadrangular (b) una cada lateral adyacente?



14. La intersección de un plano y una figura tridimensional produce una figura plana que se llama sección transversal. Por ejemplo, la sección transversal de una esfera es un círculo como se muestra en la figura.

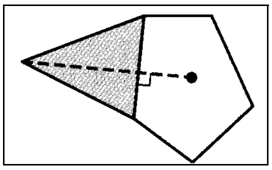


15. La figura adjunta (a la izquierda) muestra el desarrollo de una pirámide cuadrangular y a la derecha el desarrollo de una pirámide cuya base es un cuadrilátero. El punto P en cada desarrollo corresponde a la posición en el plano de la base de la proyección vertical del vértice de la pirámide.



a) Explicar por qué AB = BC, CD = ED, ..., GH = HA en los desarrollos y por qué las líneas de trazos que parten de P son perpendiculares a los lados de la base del polígono.

b) La figura adjunta es parte de un desarrollo de una pirámide pentagonal. Completar el desarrollo sobre una cartulina. Recortar y doblar el patrón para ver el cuerpo que resulta.



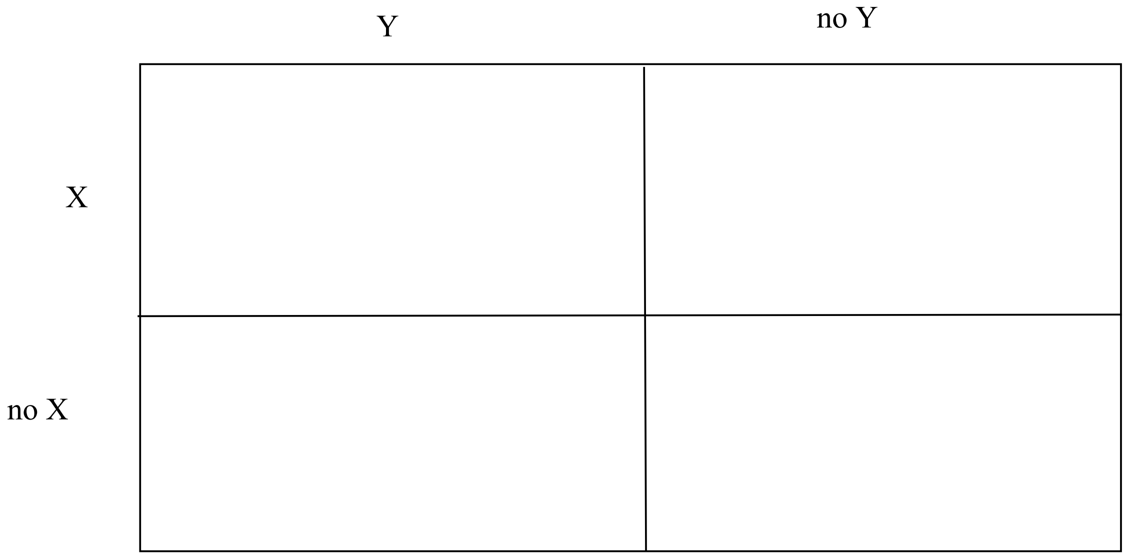
16. Considera las siguientes tres afirmaciones sobre un poliedro:

X = Todas las caras son regulares

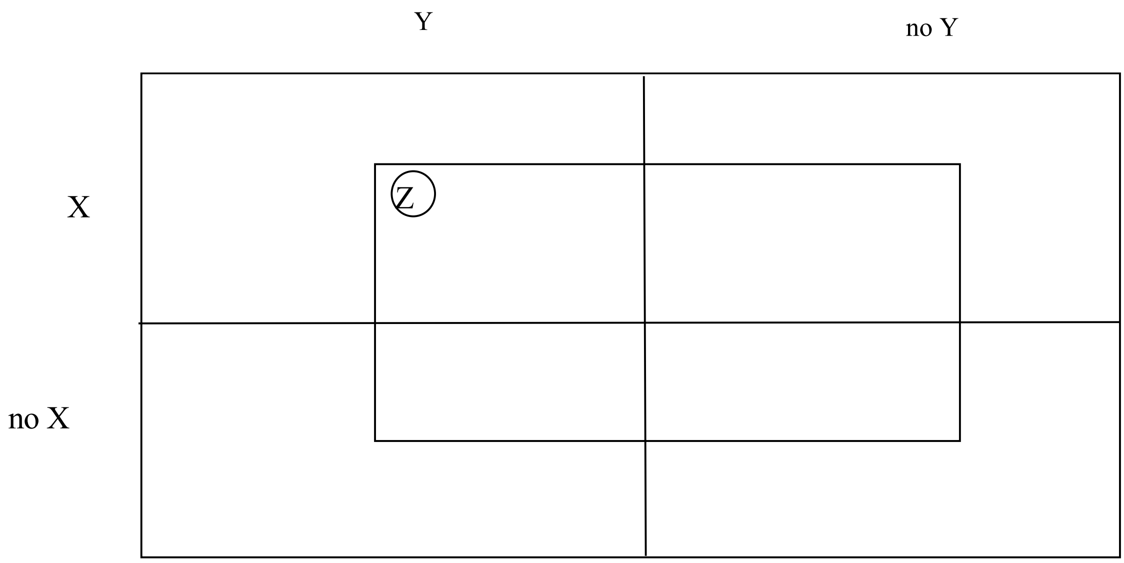
Y = Todas las caras son iguales

Z = Todos los vértices son iguales (mismo nº y tipo de cara)

Escribe en cada una de las casillas del cuadro siguiente el nombre de algunos poliedros que conozcas:



17. Repite el ejercicio anterior en el cuadro siguiente,



Identifica cada zona del dibujo mediante una serie de tres unos o ceros, según cumpla o no las propiedades X, Y, Z. Así la región 111 se distingue por cumplir X, Y, Z, mientras que la región 010 cumple NO X, Y, y No Z.
Escribe cada una de las 8 regiones y cita ejemplos de poliedros que situarías en ellas.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Cañizares, M. J. (2001) Elementos geométricos y formas espaciales. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401-426). Madrid: Síntesis

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1985). *Microordenadores en la escuela*. Madrid: Rama.

Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379-400). Madrid: Síntesis

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

III.

Geometría para Maestros

Capítulo 2:

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SIMETRÍA Y SEMEJANZA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN PRIMARIA

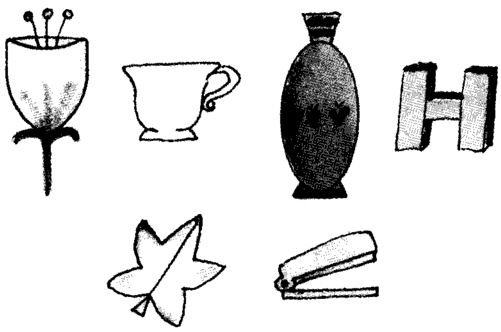
Consigna:

Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

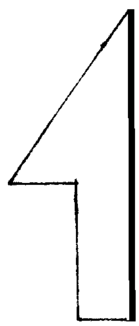
1. Resuelve los problemas propuestos.
2. Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3. Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4. Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5. ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

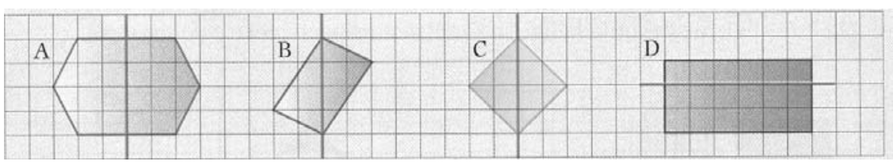
1. ¿Cuáles de estas figuras tienen eje de simetría?



2. Calca esta figura, dobla por la línea gruesa y recorta. ¿Qué se obtiene?

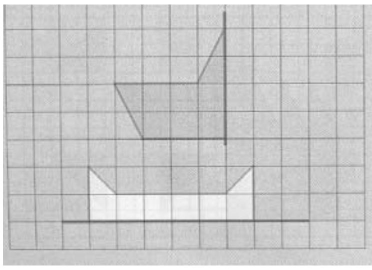


3. ¿En qué poligonos de la figura la línea de trazos no es un eje de simetría? (4º Curso)

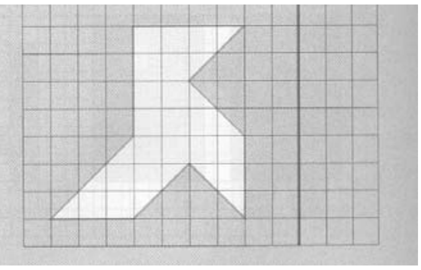


4. Dibuja un triángulo y un cuadrilátero que no tengan eje de simetría.

5. Dibuja la otra mitad de estas figuras para que sean simétricas



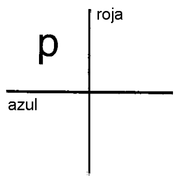
6. Dibuja la figura simétrica respecto del eje de simetría señalado



7.

LETRAS SIMÉTRICAS

Observa el dibujo y contesta.



- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta roja?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **p** respecto de la recta azul?
- ¿Qué letra es la simétrica de la letra **q** respecto de la recta roja?

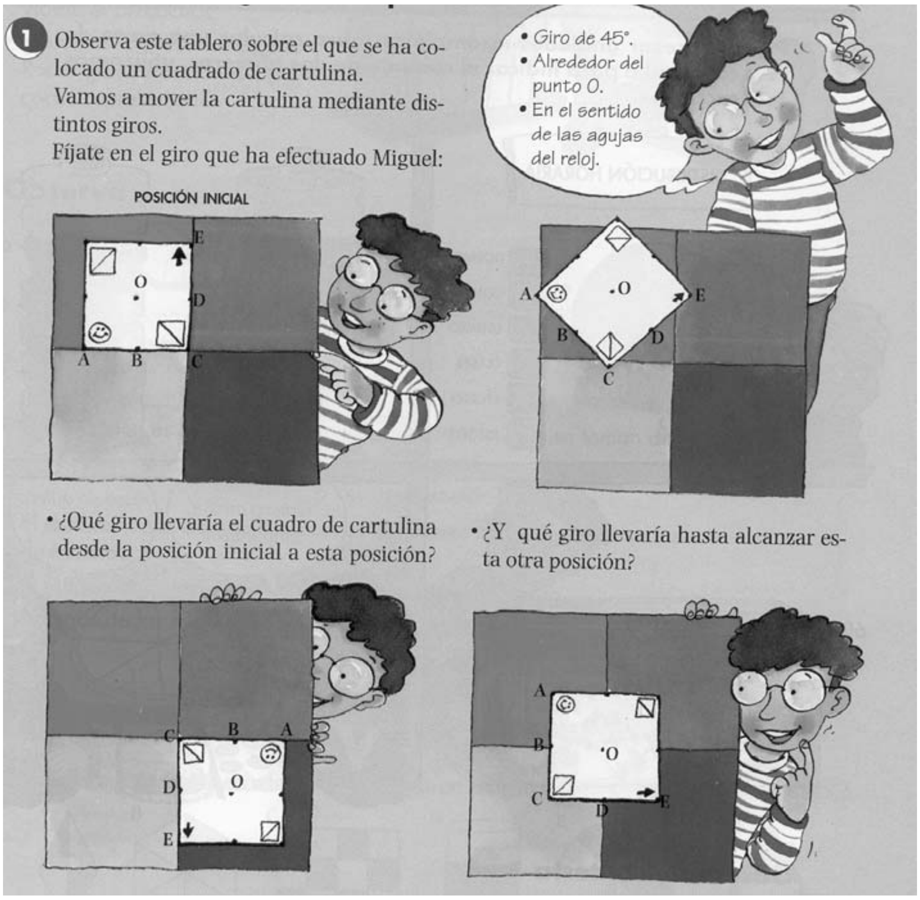
8.

Escribe las siguientes letras y traza en cada una de ellas un eje de simetría.

A B V T E M

Escribe otras cuatro letras que tengan algún eje de simetría.

9.



Dibuja el tablero y la posición del cuadro de cartulina tras los siguientes movimientos:

a) Giro de 90º alrededor del punto A en sentido de las agujas del reloj.
b) Giro de 45º alrededor del punto E en sentido contrario a las agujas del reloj.
c) Giro de 90º alrededor del punto D en sentido contrario a las agujas del reloj.

B: Conocimientos Matemáticos

1. MOVIMIENTOS RÍGIDOS: TRASLACIONES, GIROS, SIMETRÍAS, COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Imaginemos que cada punto P del plano se "mueve" hasta una nueva posición P' sobre el mismo plano. P' es la imagen de P y éste el original o preimagen de P'. Si a puntos P y Q distintos les corresponden imágenes P' y Q' distintas, y todo punto tiene una única preimagen decimos que la correspondencia establecida entre los puntos del plano es una transformación del plano.

Movimientos rígidos del plano

Una transformación del plano se dice que es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, esto es, PQ = P'Q', para todo par de puntos P y Q.

Los movimientos rígidos también se llaman *isometrías* debido a que conservan la forma y medidas de las figuras. Un modelo físico que permite materializar los movimientos rígidos del plano se puede hacer mediante una hoja de transparencias. Si tenemos cualquier figura sobre una hoja y hacemos una transparencia de dicha figura, el original y la transparencia son congruentes. La transparencia la podemos mover en una dirección, girar sobre un punto fijo, o darle la vuelta alrededor de una recta fija. En todos estos casos se obtiene una nueva figura colocada en una posición diferente, pero la forma y dimensiones de la figura original no cambian.

Hay tres movimientos rígidos del plano básicos: traslaciones, giros y simetrías.

1.1. Traslaciones

Una traslación es el movimiento rígido en el que todos los puntos del plano se mueven en la misma dirección y la misma distancia. En la figura 1 el triángulo ABC se transforma en el A'B'C' como consecuencia de la traslación definida por el vector de origen el punto A y extremo A'. Una traslación queda determinada dando un vector que especifique la dirección en la que se trasladan todos los puntos del plano y la distancia a la cual se trasladan, que es el módulo del vector (distancia entre el origen y el extremo)

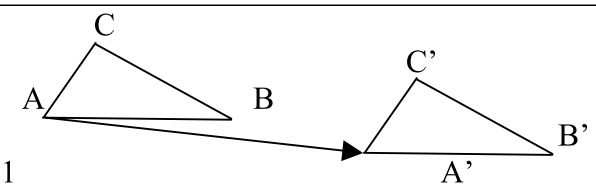


Fig. 1

1.2. Giros

El *giro* o *rotación* es otro de los movimientos rígidos básicos. Consiste en girar todos los puntos del plano alrededor de un punto fijo (*centro del giro*) un cierto ángulo que será el *ángulo de giro*. En la figura 2 hemos representado sobre una supuesta hoja de papel el triángulo ABC, el segmento PQ y el dibujo de una mano (EGF) . Al aplicar un giro a dicha hoja alrededor del punto fijo O y de amplitud 120º en el sentido contrario a las agujas del reloj se obtienen como imagenes transformadas las figuras

A'B'C', P'Q', y la mano E'G'F'. Esta transformación se puede ejemplificar usando una hoja de transparencias para materializar las imágenes obtenidas al girar la hoja manteniendo fijo el punto O.

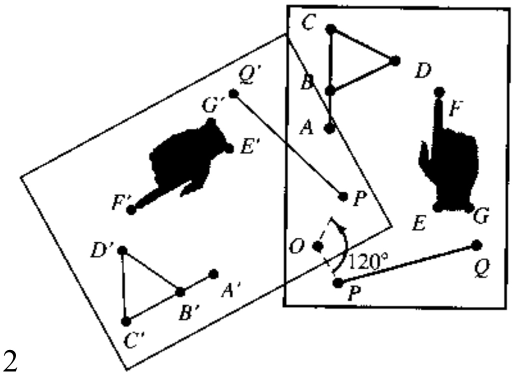


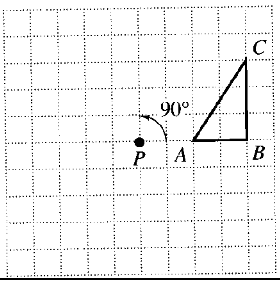
Fig. 2

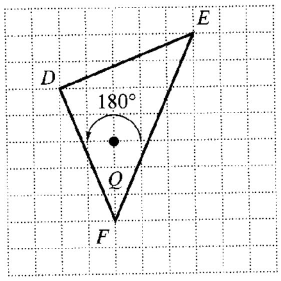
Un giro queda determinado al dar el centro O y la amplitud α del ángulo orientado correspondiente. Se considera que el giro es positivo si se produce en sentido contrario a las agujas del reloj y negativo cuando se hace en el sentido de las agujas del reloj. En un giro sólo se tienen en cuenta las posiciones iniciales y finales de los puntos.

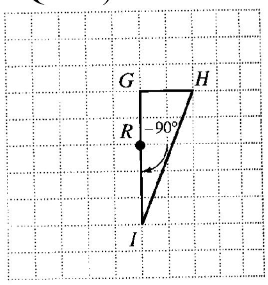
Ejercicio:

1. Encontrar la imagen de cada figura al aplicarle el giro indicado:

a) Giro de 90º alrededor de P   b) Giro de 180º sobre Q   c) Giro de –90º sobre R







1.3. Simetrías

La *simetría* o *reflexión* sobre un espejo es el movimiento rígido del plano que se produce fijando una recta *r* del plano y hallando para cada punto P otro punto P' de tal manera que la recta *r* es mediatriz del segmento PP'. Esto quiere decir que *r* es perpendicular a PP' y que pasa por el punto medio del segmento PP'.

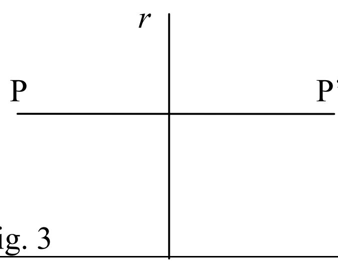
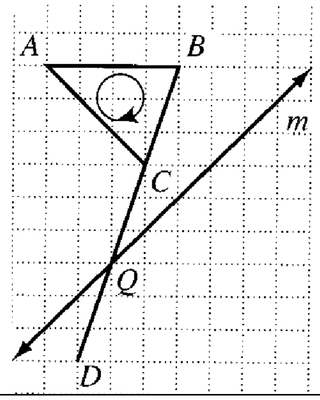


Fig. 3

Se puede observar que una simetría invierte la orientación de las figuras: los puntos que están a la derecha del eje de simetría pasan a estar a la izquierda después de la transformación, y los que están a la izquierda pasan a la derecha.

Ejercicio:

2. Trazar la figura simétrica de la "bandera" respecto de la recta *m*:



1.4. Composición de isometrías: la simetría con deslizamiento

Cualquier par de los movimientos considerados hasta ahora, traslaciones, giros y simetrías se pueden aplicar sucesivamente, esto es, primero se aplica uno y a la figura transformada se le aplica el segundo movimiento. La transformación que única que permite pasar de la primera figura a la última se dice que es la composición de los movimientos dados. Se llama *simetría con deslizamiento* a la composición de una simetría y una traslación.

Ejercicio:

3. Comprobar y demostrar las siguientes proposiciones:
a) El resultado neto de dos simetrías sucesivas es una traslación si las ejes de simetría son paralelos, o un giro, si los ejes se cortan.

b) El resultado neto de la aplicación de tres simetrías de ejes e_1, e_2 y e_3 es equivalente a:
- una simetría, si e_1, e_2 y e_3 son paralelos o concurrentes, o bien,
- una simetría con deslizamiento, si e_1, e_2 y e_3 no son paralelos ni concurrentes.

c) Cualquier movimiento rígido del plano es equivalente a uno de los cuatro movimientos rígidos básicos: una traslación, un giro, una simetría o una simetría con deslizamiento.

Los movimientos rígidos tienen muchas aplicaciones en geometría. Por ejemplo, la definición informal de congruencia, "tener la misma forma y tamaño" se puede precisar del siguiente modo:

Definición: Figuras congruentes
Dos figuras son congruentes si y sólo sí, una figura es la imagen de la otra mediante un movimiento rígido.

2. PATRONES Y SIMETRÍAS

La simetría es un principio universal de organización y de la forma. El arco de circunferencia formado por el arco iris y las simetrías exagonales de los cristales de hielo son expresiones visibles de la simetría de muchos procesos físicos del universo. La simetría es una especie de norma en la naturaleza y no una excepción. Todas las culturas humanas, hasta las más primitivas han desarrollado una comprensión intuitiva de los conceptos básicos de la simetría. Las decoraciones encontradas en las cerámicas, paredes de templos, armas, instrumentos musicales, etc. Incorporan, con mucha frecuencia, elementos simétricos. Incluso la música, la poesía y la danza incorporan frecuentemente la simetría en su estructura interna.

Simetría de una figura plana

Una simetría de una figura plana es cualquier movimiento rígido del plano que hace coincidir todos los puntos de la figura con otros puntos de la misma figura. Esto es, todos los puntos P de la figura son transformados por el movimiento en otros puntos P' que son también puntos de la figura. El movimiento identidad es una simetría de cualquier figura, pero en general interesa identificar otros movimientos de simetría que no sean la identidad. Como consecuencia de una simetría que no sea la identidad algunos puntos de la figura se mueven hacia otras nuevas posiciones en la propia figura, aunque la figura en su conjunto aparezca inalterada en el movimiento.

El teorema de clasificación que hemos enunciado nos dice que existen cuatro movimientos rígidos básicos del plano (traslaciones, giros, simetrías y simetrías con deslizamiento). Por tanto, toda simetría de una figura es uno de estos cuatro movimientos básicos, y las propiedades de simetría de una figura se pueden describir completamente listando las simetrías de cada tipo.

2.1. Simetría axial

Se dice que una figura tiene simetría por reflexión si hay una recta que pasa por la figura que es un eje de simetría de la figura, esto es, el movimiento de simetría sobre dicho eje hace coincidir la figura consigo misma de manera global.

Ejercicio:

4. ¿Cuántas líneas de simetría tienen las siguientes letras?:

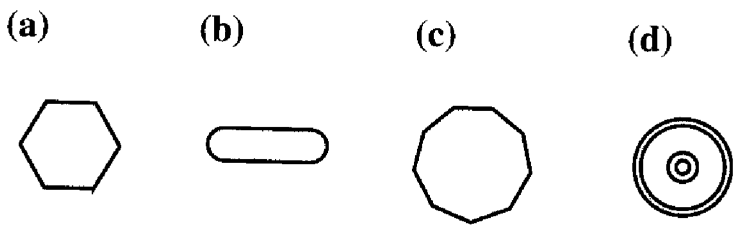
(a) **(b)** **(c)** **(d)**

2.2. Simetría rotacional

Se dice que una figura tiene simetría rotacional si la figura coincide consigo misma cuando se gira un cierto ángulo entre 0º y 360º alrededor de un cierto punto. El centro de giro es el centro de rotación de la figura.

Ejercicio:

5. Determinar los ángulos de las simetrías rotacionales de estas figuras:



2.3. Simetría central

Una figura tiene simetría puntual si existe una simetría por rotación de 180º sobre algún punto O. Esto implica que al darle media vuelta a la figura coincide consigo misma de manera global, y cada punto P de la figura tiene un punto correspondiente P' de la figura que está en dirección opuesta en el giro de centro O.

Ejercicio:

6. ¿Qué letras, escritas en mayúscula, tienen simetría puntual?

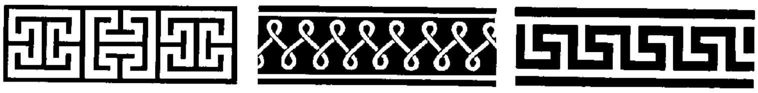
2.4. Cubrimientos regulares del plano. Frisos y mosaicos

Llamamos cubrimiento regular del plano al resultado de someter a una figura dada a repeticiones (isometrías planas) de forma que el plano quede recubierto de dichas figuras sin dejar huecos y sin que haya solapamientos. Si a una figura la sometemos a traslaciones en una sola dirección obtenemos los *frisos*, y si la sometemos a dos traslaciones de direcciones distintas se obtienen los *mosaicos*. Tanto los frisos como los mosaicos constituyen patrones geométricos, es decir, formas que se obtienen mediante una figura generadora (figura mínima) a la que se le aplica un grupo de transformaciones.

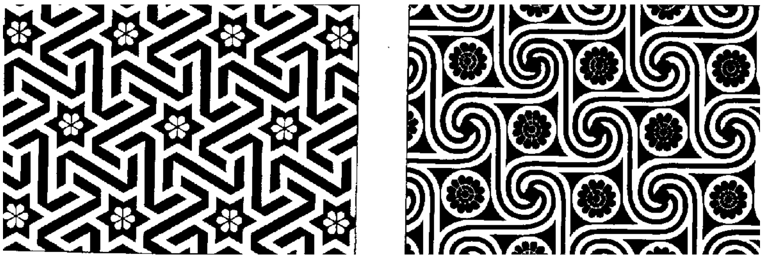
Los patrones geométricos son usados frecuentemente en motivos decorativos de paredes, alfombras, etc. Es necesario mostrar un fragmento de tamaño suficiente para mostrar el motivo que se repite indefinidamente.

Un patrón puede tener otras simetrías además de la simetría por traslación. Sin embargo, las posibilidades son limitadas. Por ejemplo, la única simetría rotacional de un friso es media vuelta. El hecho de que sólo ciertas simetrías pueden coexistir en un patrón hace posible clasificar los tipos de simetrías de los patrones. En particular, se ha demostrado que hay sólo siete tipos de frisos, y diecisiete tipos de mosaicos.

Frisos:



Mosaicos:

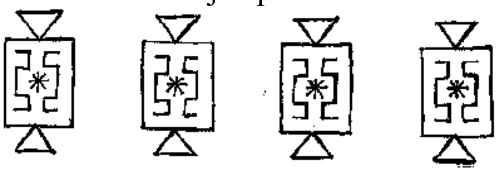


Clasificación de frisos y mosaicos

Existen diversas notaciones para nombrar los siete tipos de cenefas o frisos que existen. Una de ellas viene dada por un par de caracteres cuyo significado resumimos en la tabla siguiente:

Primera letra	**Segunda letra**
m = simetría vertical	m = simetría horizontal
1 = no simetría vertical	g = simetría con deslizamiento
	2 = simetría central
	1 = no simetría adicional

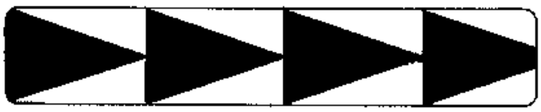
Mostramos un ejemplo de cada uno de los siete tipos de frisos realizados por niños:



mm (reflexión vertical y horizontal)

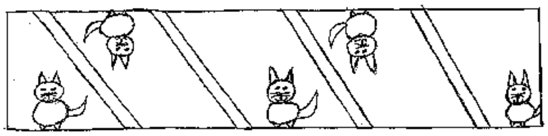
mg (reflexión vertical y deslizamiento)

m1 (solamente reflexión vertical)



1m (solamente reflexión horizontal)

1g (solamente deslizamiento)


12 (solamente simetría central)


11 (sin simetría)

De igual modo, si en lugar de efectuar traslaciones en una sola dirección lo hacemos en dos direcciones distintas, obtenemos los llamados grupos cristalográficos planos, pues éste es un problema que se origina en la Cristalografía, habiendo sido estudiado por el cristalógrafo ruso Fedorov. Solamente existen 17 formas de cubrir el plano indefinidamente de manera periódica regular. Estos mosaicos también se llaman en inglés "*grupos de papel pintado*" (wallpaper groups) ya que los empapelados de paredes pertenecen a alguna de estas clases. Encontramos un ejemplo al menos de estos teselados en la Alhambra. El artista holandés M.C. Escher se interesó mucho por la "división regular del plano", y en su obra se pueden apreciar ejemplos de diversos grupos cristalográficos.

La notación de cada una de estas formas es algo más compleja, y tiene en cuenta, además de las transformaciones que intervienen, las retículas poligonales subyacentes.

Algunos ejemplos de mosaicos que existen en la Alhambra:



3. PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA. TEOREMA DE THALES

3.1. Medida y razón de segmentos

En la figura 4 vemos que los niños están midiendo la sombra del árbol, la distancia entre A y C. Supongamos que la longitud de la sombra mide 6 metros. Esto quiere decir que necesitamos poner, de manera contigua y alineados, 6 trozos de una longitud que llamamos *metro*.

En esta situación de medida podemos decir que la razón entre la longitud de la sombra y la longitud del metro es de 6 a 1.

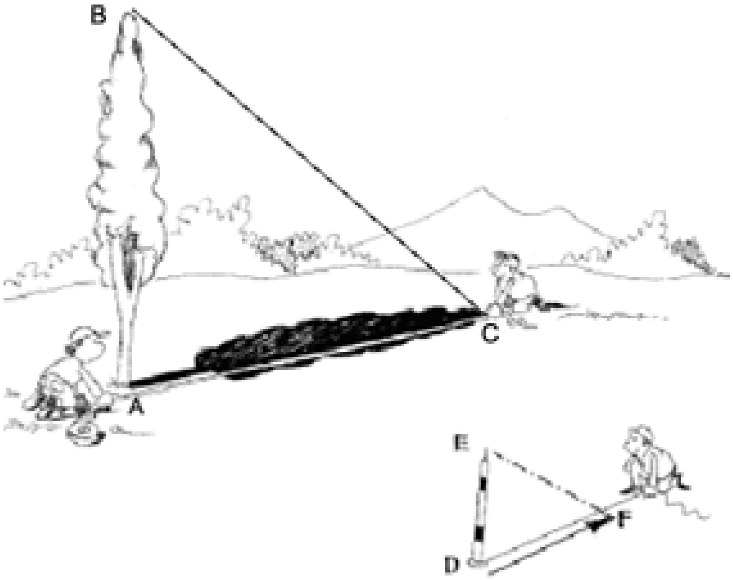


Fig. 4

En general, el proceso de medir una longitud consiste en encontrar el número de veces que tenemos que usar otra longitud, tomada como unidad, para cubrir la longitud dada siguiendo una técnica precisa. La medida que se obtiene depende de la unidad elegida, y puede ser un número natural, racional, o irracional, como ocurre cuando tratamos de medir la longitud de la diagonal de un cuadrado usando el lado como unidad.

Razón de segmentos

Si elejimos un segmento *u* como unidad de medida podemos asignar a cualquier otro segmento un número real, que será su medida con la unidad *u*. La razón entre dos segmentos se define como la razón numérica entre sus respectivas medidas usando una unidad determinada. Simbólicamente,

$\frac{PQ}{RS} = \frac{m_u(PQ)}{m_u(RS)}$, donde m_u(PQ) , m_u(RS) indica las medidas de los segmentos PQ, RS con la unidad u.

En el caso de la figura 5 la medida de PQ usando la unidad *u* es 8, y la del segmento RS es 5. Por tanto la razón entre ambos segmentos es 8/5, que será la medida racional de PQ usando RS como unidad, o sea, se puede escribir: PQ =(8/5).RS

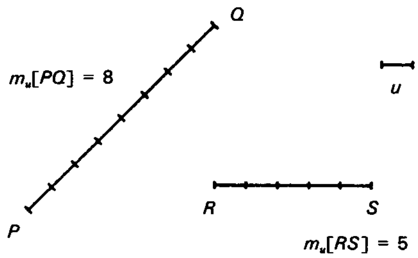


Fig. 5

Ejercicio:

7. Supongamos que dos segmentos cualesquiera se miden con una unidad u_1 y se calcula la razón entre ambos. ¿Qué le ocurre a dicha razón si ambos segmentos se miden con otra unidad u_2 tal que $u_2 = 2.u_1$?

En la figura 4 los niños están midiendo la longitud de la sombra del árbol y también la longitud de la sombra de un bastón. ¿Qué pretenden hacer? ¿Qué harán con las medidas? Parece que han estudiado geometría y saben que existe una relación entre la razón de las longitudes de las sombras y los objetos que las proyectan: Ambas razones son siempre iguales:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

En este tipo de situaciones decimos que las longitudes de las sombras son proporcionales a las longitudes de los objetos: si un objeto tiene doble, triple, ..., altura que otro, su sombra también será doble, triple, ..., que la del otro.

En nuestro ejemplo, si el bastón mide 1 m., su sombra 1'2 m. y la sombra del árbol 6 m., tendremos,

$\frac{1}{1'2} = \frac{x}{6}$, de donde se obtiene que la altura del árbol, x = 5 metros.

Se dice que dos pares de segmentos son proporcionales si las razones que se establecen entre cada par son iguales.

La proporcionalidad entre las longitudes de los objetos y sus sombras se basa en que los rayos del sol se pueden considerar que inciden de forma paralela, dada la gran distancia a que se encuentra el sol. Veamos, a continuación, la explicación matemática de la propiedad que permite calcular distancias y longitudes de objetos en circunstancias similares a la descrita.

3.2. Proyecciones paralelas

Consideremos dos rectas concurrentes *a* y *a'* en el punto O, y sea *b* otra recta en una dirección cualquiera, no paralela ni a *a* ni a *a'*, como se muestra en la figura adjunta. Sean los puntos P, Q, R, S de la recta *a* situados a distancias arbitrarias de O. Tracemos rectas paralelas a la recta *b* que pasen precisamente por los puntos P, Q, R, S. Esas rectas cortan a la recta *a'* en los puntos P', Q', R', S', respectivamente.

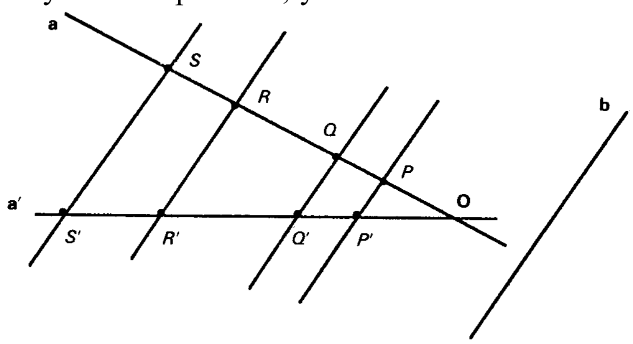


Fig. 6

Para cualquier punto de la recta *a* se puede trazar una paralela a *b* que cortará a *a*' en otro punto. De esta manera se establece una aplicación biyectiva que asocia a cada punto de la recta *a* un punto de la recta *a*'. La proyección paralela de un segmento es el segmento formado por las proyecciones de los extremos del segmento original.

Designemos esta aplicación biyectiva con la notación pp (abreviatura de *proyección paralela*). Esta aplicación cumple las siguientes propiedades:

1) Si dos segmentos son iguales, también lo serán sus proyecciones paralelas, o sea, si PQ = QR entonces pp(PQ) =pp(QR)

Esta propiedad se justifica observando la figura 7. Si las rectas están igualmente espaciadas los triángulos sombreados obtenidos trazando por P’, Q’, R’, rectas paralelas a *a* son iguales, lo que implica que P’Q’ = Q’R’.

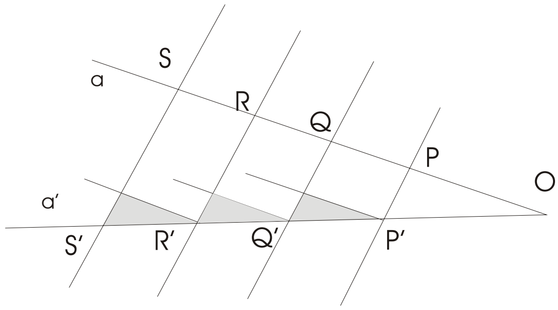


Fig. 7

2) La proyección paralela de la suma de dos segmentos de la recta *a* es igual a la suma de las proyecciones paralelas de dichos segmentos sobre la recta *a'*, o sea,

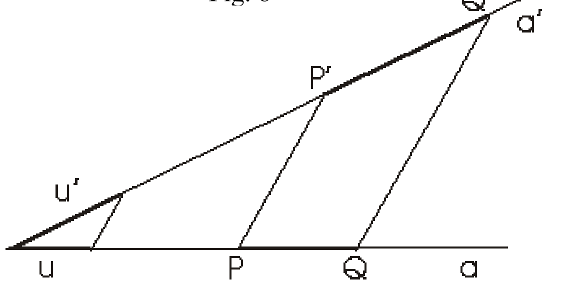
pp(PQ + QR) = pp(PQ) + pp(QR) = P'Q' + Q'R'

En efecto, pp(PQ+QR) = pp(PR) = P’R’ = P’Q’+Q’R’ = pp(PQ) +pp(QR)

De estas propiedades se deriva que si la serie de segmentos PQ, QR, RS, ... son congruentes, también lo serán los segmentos P’Q’, Q’R’, R’S’, ..., y que si la razón de las longitudes entre dos segmentos es *r*, la razón entre los segmentos proyectados también será *r*.

En general se cumple que la proyección paralela del segmento obtenido al multiplicar la longitud del segmento PQ por cualquier número real *r* es el segmento que se obtiene al multiplicar por *r* la longitud del segmento P'Q'. Simbólicamente, pp(r.PQ) = r.P'Q'.

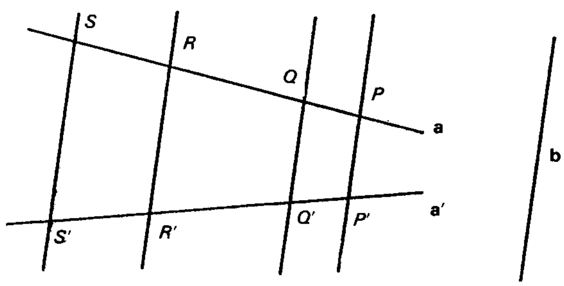
Fig. 8



Si sobre la recta *a* hemos elegido una unidad de medida *u* y sobre la recta *a’* la unidad *u’* podemos establecer una proyección paralela que haga corresponder dichas unidades. Las propiedades mencionadas de las proyecciones paralelas permiten afirmar que si la medida del segmento PQ es m_u(PQ), la medida del segmento proyectado P’Q’ con la unidad *u’,* $m_{u'}$(P’Q’), será la misma, ya que tales medidas son las razones entre los segmentos y las unidades de medida correspondientes.

3.3. Teorema de Thales

Los segmentos homólogos en la proyección paralela que se establece cuando dos rectas distintas *a* y *a'* son cortadas por un haz de rectas paralelas son proporcionales (ver figura adjunta). Simbólicamente,



$$\frac{PQ}{RS} = \frac{P'Q'}{R'S'}$$

Fig. 9

En efecto, la razón entre los segmentos PQ y RS quiere decir que existe un número real k tal que PQ =k.RS; este número k no es sino la medida de PQ usando RS como unidad. Si aplicamos una proyección paralela a los segmentos de la recta *a*, se verificará,

pp(PQ) = pp(k.RS) = k.pp(RS); o sea, P'Q' = k.R'S', relación que se expresa también en forma de razón: $\frac{P'Q'}{R'S'} = k$, lo que prueba el enunciado del teorema de Thales.

Una consecuencia del teorema de Thales

> *Toda paralela a un lado de un triángulo determina con los otros dos un nuevo triángulo cuyos lados son proporcionales a los del primero.*

En efecto, si en el triángulo ABC trazamos una paralela MN al lado BC, por el teorema de Thales se cumple:

(1) $$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Trazando por N una paralela AB, por el mismo teorema de Thales, tenemos:

(2) $$\frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{MN}{BC}$$

De las expresiones (1) y (2) se deduce,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

que es el expresión simbólica de la propiedad enunciada.

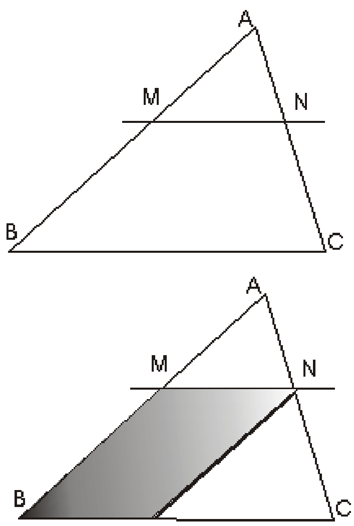
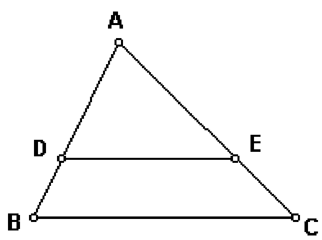


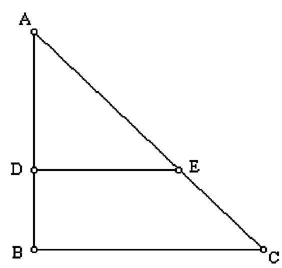
Fig. 10

Ejercicios:

8. Encontrar la medida del segmento EC conociendo que:
BC||DE, |AB|=9cm, |DA|=6cm, |AC|=15cm

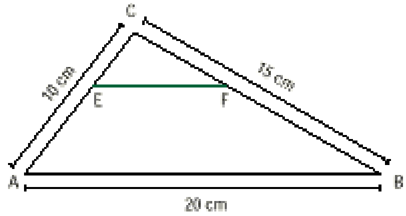


9. Encontrar la medida del segmento AC conociendo que:
DE||BC, medida del ángulo EDA=90º, |AD|=2cm, |DE|=3cm y |BC|=18cm



10. Dividir un segmento en 3 partes de igual medida.
11. Dividir un segmento AB en la razón 2:3

12. Calcula la medida del segmento EF si E y F dividen respectivamente los lados AC y BC del triángulo ABC, en la razón 2:3 siendo AE más largo que EC.



13. Si la razón entre la diagonal de un rectángulo y su lado mayor es 5:4, entonces ¿en qué razón están el lado mayor con el lado menor del rectángulo?. Explicar el procedimiento realizado.

14. La sombra de un rascacielos en un determinado momento del día mide 192 m. Si en el mismo instante y lugar la sombra de una señal de tráfico de 2'5 m de altura, mide 1'5 m, ¿Cuál es la altura del rascacielos?

15. A un incendio producido en un hospital acude la unidad de bomberos con una escalera de 32 m de longitud que consta de 80 peldaños distribuidos uniformemente. Al apoyar la escalera sobre la fachada del edificio se observa que el primer peldaño se encuentra a 30 cm del suelo.
a) ¿Qué altura del edificio alcanzará la escalera?
b) Si el fuego se halla en la quinta planta, y cada planta tiene 4'5 m de altura, ¿podrán ser rescatados los enfermos que allí se encuentren?
c) Puesto que las llamas ascienden hacia arriba, ¿es posible con dicha escalera evacuar las siete plantas de que consta el hospital?

4. TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

El concepto de movimiento rígido se ha usado para definir de manera precisa la noción de congruencia de figuras, que suele describirse de manera informal como “figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma”. La noción informal de figuras semejantes como las que tienen la misma forma puede ser precisada utilizando las transformaciones del plano que se conocen como homotecias y semejanzas.

4.1. Homotecias (transformaciones de tamaño)

Definición:

Sea O un punto del plano y k un número real positivo (Fig. 11). Una *homotecia* de centro O y factor de escala k es la transformación geométrica que transforma cada punto P del plano, distinto de O en el punto P' situado en la semirrecta OP de tal manera que OP' = k.OP, y deja invariante el punto O. La figura adjunta muestra dos ejemplos de tales transformaciones. En la a) el factor de escala es mayor que 1 y en la b) es menor que 1.

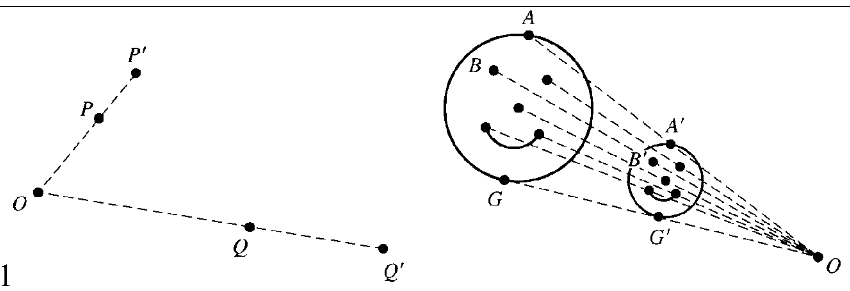


Fig. 11

(a) $\dfrac{OP'}{OP} = \dfrac{OQ'}{OQ} = k, k > 1$	(b) $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = ... = \dfrac{OG'}{OG} = k, k < 1$

Cuando el factor de escala es mayor que 1, la imagen de una figura por la transformación será de mayo tamaño que el original, y se dirá que la transformación es una *expansión*. Si k < 1 la transformación de tamaño es una *contracción*. Si k = 1, todos los puntos permanecen en su misma posición, o sea, P = P' para todos los puntos, y la transformación de tamaño es la identidad.

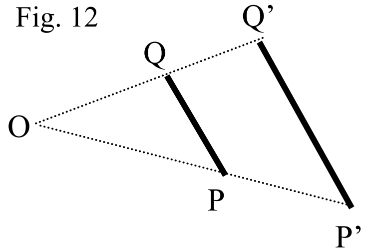
Teorema: Cambio de distancia bajo una homotecia

La distancia entre las imágenes de cualquier par de puntos es k veces la distancia entre sus respectivas preimágenes. Esto es, para cualquier par de puntos P y Q, P'Q' = k.PQ.

Demostración:

Por la definición de homotecia se tiene que OQ’ =kOQ, y que OP’ = kOP. Los triángulos formados tienen dos lados comunes y el mismo ángulo en O, luego son semejantes. De aquí se deduce que Q’P’ = kQP.

Fig. 12



Ejercicio:

16. Demostrar las siguientes propiedades de invariancia de las homotecias:

a) Los segmentos se transforman en segmentos paralelos.
b) Las rectas y semirectas se transforman en rectas y semirectas paralelas
c) La imagen de un ángulo es otro ángulo congruente.
d) Se conserva la razón entre distancias.

4.2. Semejanzas

Definición:

Diremos que una transformación es de semejanza si y sólo si es una secuencia de homotecias (transformaciones de tamaño) y movimientos rígidos.

La figura 13 muestra la transformación de semejanza del triángulo ABC obtenida como composición sucesiva de la homotecia de centro O, seguida de la simetría de eje *l*, y seguida finalmente por otra homotecia de centro P.

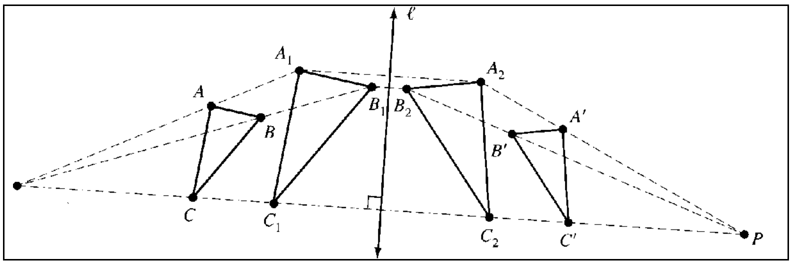
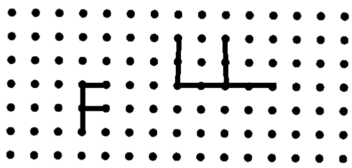


Fig. 13

Definición: Figuras semejantes

Dos figuras F y G se dice que son semejantes, lo que se escribe F ~ G, si y sólo si, existe una transformación de semejanza que transforma una figura en la otra.

Ejercicio:
17. Mostrar que la letra F pequeña de la figura es semejante a la letra F grande girada:



5. MOVIMIENTOS Y GEOMETRÍA DE COORDENADAS. ESTUDIO DINÁMICO CON RECURSOS EN INTERNET

En la página web del Proyecto Descartes, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/ , encontramos recursos dinámicos que permiten explorar las propiedades de las traslaciones, giros y simetrías. En el índice del proyecto, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/indice_ud.htm encontramos tres entradas para el estudio de la semejanza, movimientos en el plano y las teselaciones. En el apartado de Aplicaciones, http://www.cnice.mecd.es/Descartes/indice_aplicaciones.htm#movimientos encontramos los siguientes recursos:

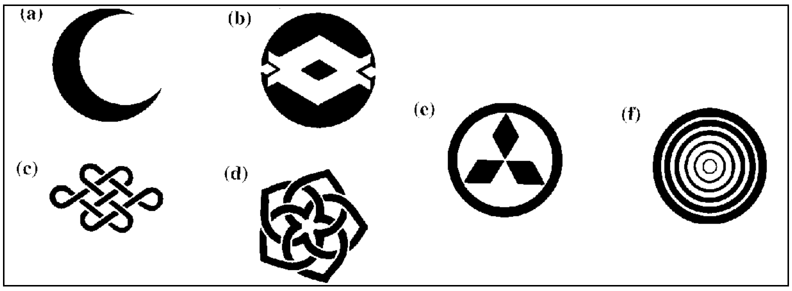
TÍTULO
Teorema de Thales
Semejanza de triángulos
Vectores y traslaciones
Movimientos en el plano
Movimientos en el plano (sobre puntos, segmentos, rectas y ángulos)
Movimientos en el plano (sobre un cuadrado). Coordenadas
Movimientos en el plano (vectores)
Semejanzas en el plano
Semejanzas

6. TALLER MATEMÁTICO

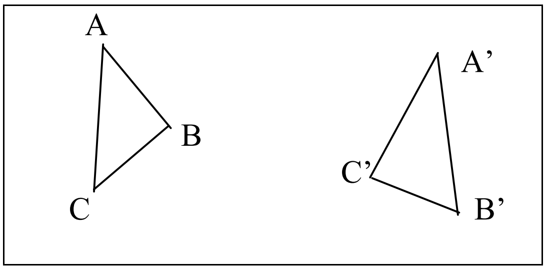
1. Dibujar polígonos con las siguientes simetrías, si es posible.
a) Un eje de simetría pero ninguna simetría rotacional.
b) Simetría rotacional pero ninguna simetría axial.
c) Un eje de simetría y una simetría rotacional.

2. ¿Cuál es el movimiento rígido equivalente a dos medias vueltas (giros de 180º) realizadas sucesivamente sobre dos puntos O_1 y O_2?. (Explica mediante esquemas la solución; puede ser útil representar con una letra la distancia entre los centros de giro).

3. Para cada una de las figuras adjuntas determinar:
a) los ejes de simetrías;
b) los ángulos de las simetrías de rotación que tengan



4. Dibuja la figura adjunta de tal manera que el triángulo ABC sea congruente al A'B'C'.



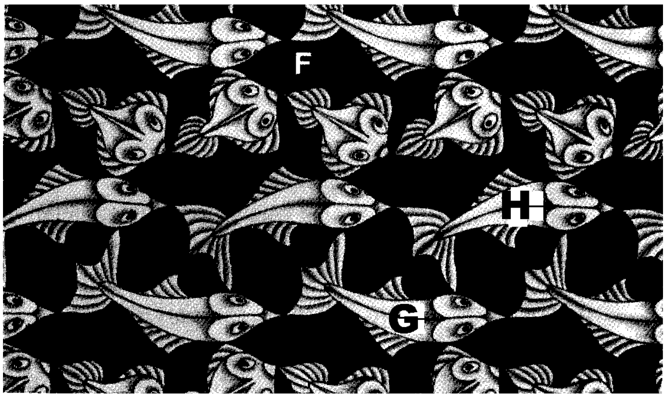
a) Usar un espejo (u otra herramienta de dibujo) para trazar la recta m_1 de manera que A' sea el punto simétrico del A. Dibujar también las imágenes del B y C mediante m_1 y nombrarlas como B_1 y C_1.
b) Dibujar la recta m_2 de manera que B_1 sea el simétrico de B'. ¿Cuál es la imagen de C_1 sobre m_2?.
c) Usar las rectas m_1 y m_2 para describir el movimiento rígido que transforma el triángulo ABC en el A'B'C'.

5. Describir las simetrías en los siguientes patrones planos formados repiendo letras mayúsculas. Para las simetrías de rotación dar el centro de giro y la amplitud del ángulo de giro. Para las simetrías y simetrías con deslizamiento dar las direcciones de los ejes y los vectores correspondientes.

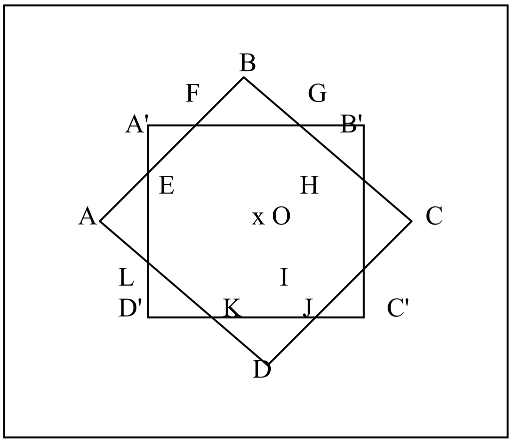
a) A A A A	B) E E E E	C) N N N N
A A A A	E E E E	N N N N
A A A A	E E E E	N N N N
A A A A	E E E E	N N N N

d) Z N Z N N Z N Z Z N Z N N Z N Z	e) p q p q d b d b p q p q d b d b	f) E E E E E E E E E E E E E E E E

6. En la figura adjunta se representa un fragmento de un recubrimiento del plano elaborado por M. C. Escher. Se han marcado tres peces grandes con las letras F, G. y H.
a) ¿Qué tipo de movimiento rígido hace coincidir F con G?
b) Qué tipo de movimiento rígido hace coincidir F con H?



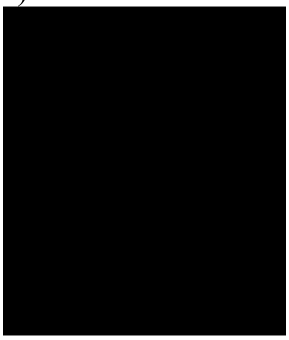
7. En la figura adjunta, el cuadrado A'B'C'D' se ha obtenido girando el cuadrado ABCD 45º alrededor del punto O. (el segmento AB = A'B')



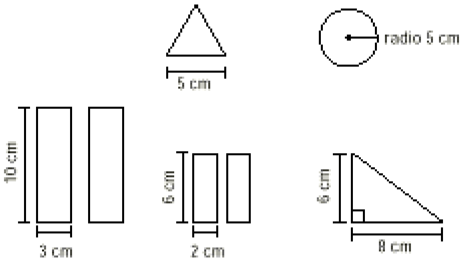
Propiedades de la figura:
a) ¿Cómo son los triángulos FBG, GB'H, HCI, IC'J, JDK, ...?
b) Desmostrar que los puntos A, A', B, B', C, C', D, D' están sobre una misma circunferencia.
c) ¿Es regular el octógono EFGHIJKL?. Justificar la respuesta.
d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

8. Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como la del dibujo a). Las piezas y sus medidas son las indicadas en b)

a)



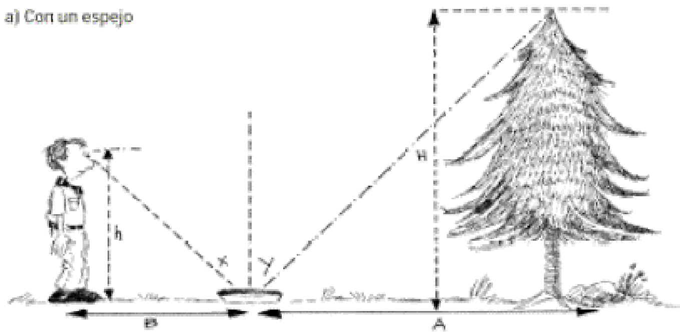
b)



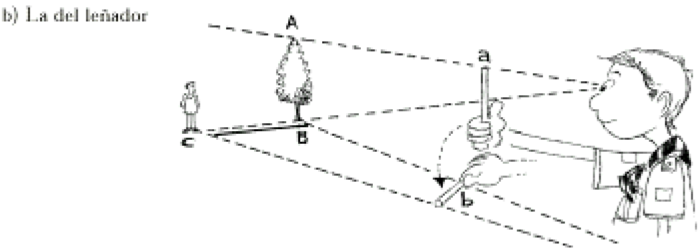
Por diversas razones, la empresa decide agrandar estas piezas con el siguiente criterio: lo que mide 5 cm pasará a medir 8 cm; el resto de las medidas se deben ajustar a ese criterio para mantener la proporción. Diseñar en cartulina las piezas del juego ya ampliado. Analizar y comentar los procedimientos utilizados. ¿Cuál fue la pieza que ofreció mayor (o menor) dificultad para rehacerla?

9. Distancias o alturas aplicando la semejanza

Los dibujos siguientes ilustran diversas maneras, utilizadas habitualmente por los guías y scouts, para estimar alturas y distancias. Justificar los distintos procedimientos.

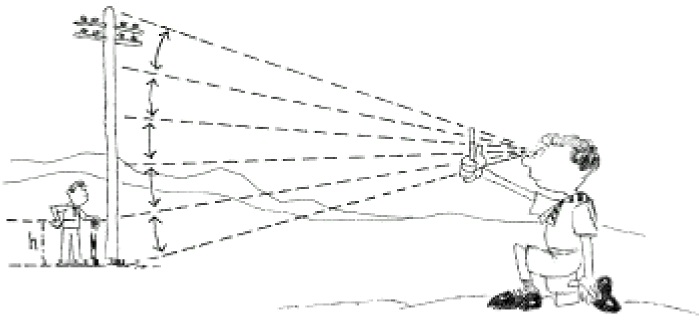


En este caso, es necesario que la persona pueda observar el extremo superior del árbol reflejado en el espejo.



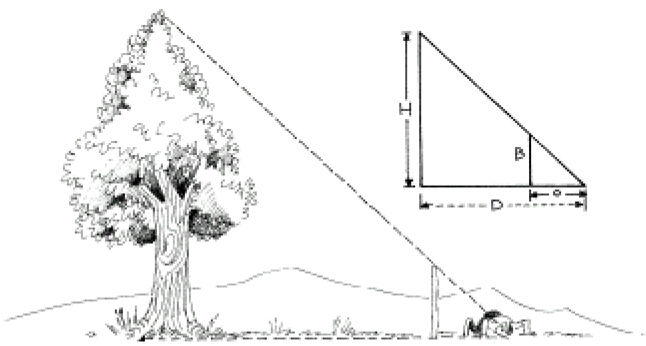
Mirando con un solo ojo, se cubre la altura del árbol con una varita o un lápiz que se sostiene en la mano. Girar la mano en 90º y que una persona se ubique en el punto que corresponde al extremo libre de la varita.

c) ¿Cuántas veces cabe?



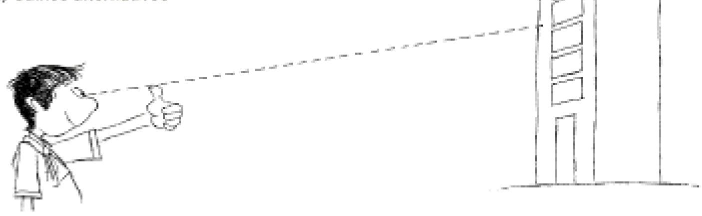
Colocar al pie de un poste una persona o vara de altura conocida. Ubicarse a una distancia adecuada, mirando con un solo ojo y recurriendo a un lápiz o varita que se sostiene con la mano, cubrir la persona y contar cuántas veces cabe en la altura de dicho poste.

e) Haciendo coincidir los extremos



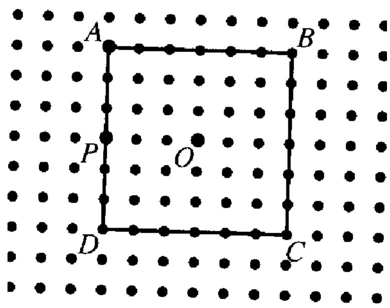
Es necesario ubicarse a una distancia tal que mirando con un solo ojo queden alineados el extremo superior del árbol y el de la vara de longitud conocida.

f) Guiños alternativos

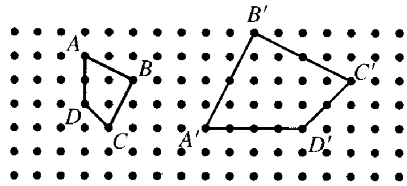


Con el brazo estirado, utilizar como mira el dedo pulgar para ubicar dos puntos sobre el edificio, mirando primero con un ojo y después con el otro. Estimar la distancia entre ambos puntos, multiplicarla por 10 para obtener una estimación de la distancia que los separa del edificio. El factor 10 deriva de la razón entre la medida aproximada de la distancia entre ambos ojos (6 cm) y la longitud de los brazos (60 cm) un promedio aproximado y cómodo para hacer los cálculos.

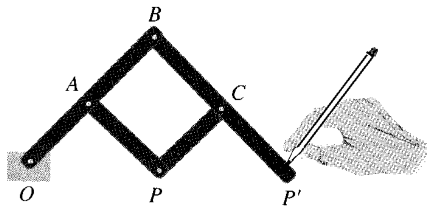
10. Copiar en papel pautado el cuadrado ABCD de la figura adjunta. Dibujar las imágenes del cuadrado en las siguientes transformaciones. Hacer un dibujo separado para cada uno de los casos a), b) y c).
a) Homotecias con centro O y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3, 4/3.
b) Homotecias con centro A y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3 y 4/3.
c) Homotecias con centro P y cada uno de los factores de escala, 1/3, 2/3 y 4/3.



11. Describir una semejanza que transforme el cuadrilátero ABCD en el cuadrilátero A'B'C'D' según se indica en la figura adjunta. Dibujar las imágenes intermedias de la homotecia y el movimiento rígido que compone la semejanza.



12. Un pantógrafo es un dispositivo mecánico que se usa para hacer ampliaciones o reducciones de dibujos. Se puede construir una versión simple usando tiras de cartulina que se unen de manera articulada con algún tipo de remache formando un paralelogramo con dos lados prolongados, como se indica en la figura. El punto O se mantiene fijo en la superficie en la que se van a trazar los dibujos mientras que el P se mueve sobre la figura a copiar. El lápiz situado en P' traza la ampliación. (Si se invierte la función de los puntos P y P' se obtiene una reducción).
a) Explicar por qué el pantrógrafo permite hacer homotecias de manera mecánica.
b) ¿Cuál es el factor de escala de la homotecia? Considerar que todos los puntos adyacentes a lo largo de una banda están a la misma distancia.



Bibliografía

Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1988). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 427-448)*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Jaime, A. y Gutiérez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

III.

Geometría para Maestros

Capítulo 3:

ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

A: Contextualización Profesional

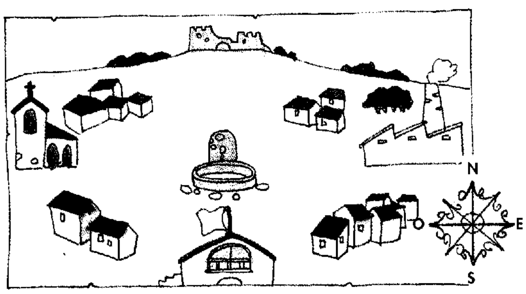
ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL Y SISTEMAS DE REFERENCIA EN PRIMARIA

Consigna:
Los enunciados que se incluyen a continuación han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos,

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

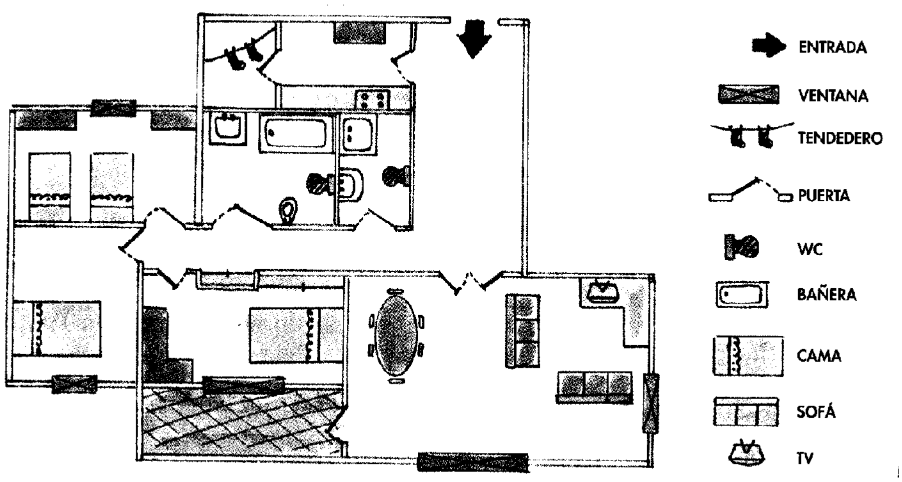
Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Copia y completa en tu cuaderno las frases siguientes:



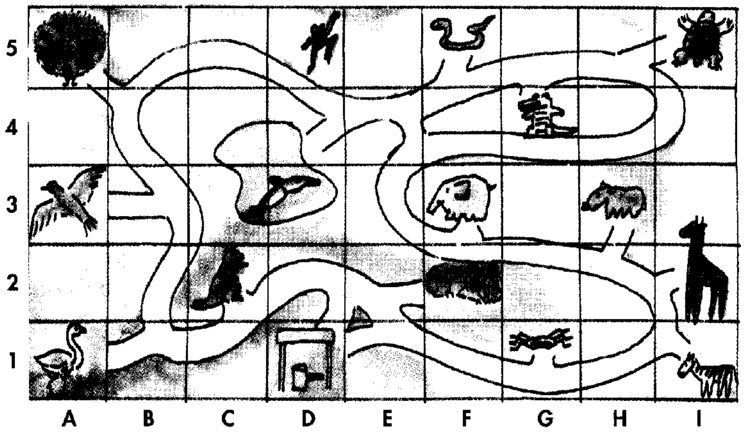
- La iglesia está al ..... de la fuente.
- El ayuntamiento está al .... del castillo y al .... de la fábrica.
- El castillo está al .... de la iglesia y al .... de la fábrica.

2. Observa el plano de la vivienda de la familia de Pedro:



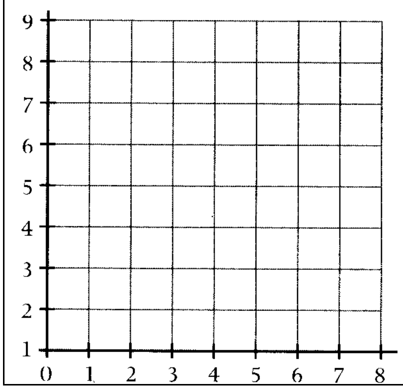
- ¿Cuántos dormitorios tiene? ¿Y camas?
- ¿Qué te encuentras nada más entrar a la derecha?
- ¿Cuántas ventanas tiene el salón?

3. Abel ha ido al zoo. Al entrar le han dado un croquis con la distribución de los animales. El elefante está en la casilla (F, 3)

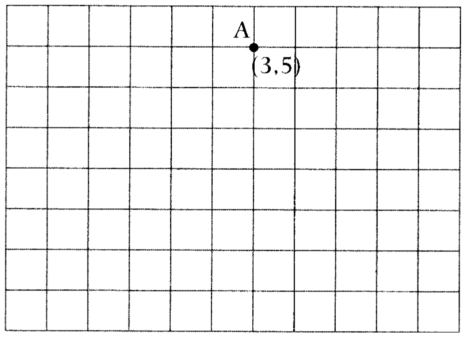


- ¿En qué casilla está el canguro?
- Indica la posición que ocupan en el plano del zoo: a) El pavo real; b) El cocodrilo; c) El león
- ¿Qué animal ocupa la casilla (A, 1); ¿Y la casilla (F, 5); ¿Y la casilla (I, 2)?

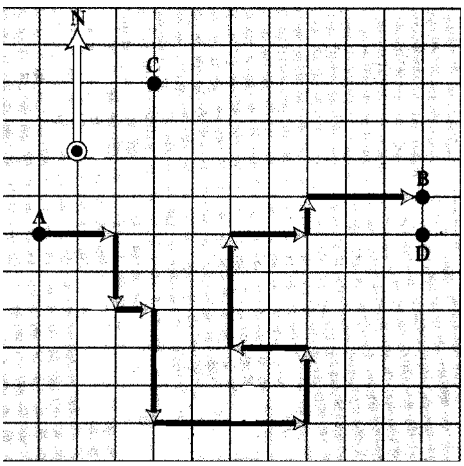
4. ¿Por qué no está bien dibujado este sistema de coordenadas?



5. Dibuja los ejes de coordenadas que correspondan al punto A.

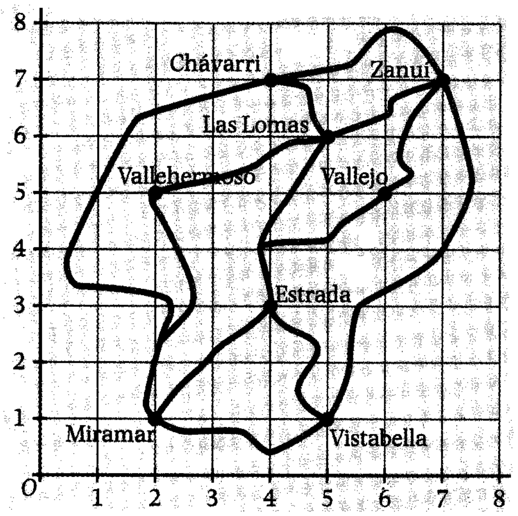


6. Completa la ruta desde el punto A al punto B como en el ejemplo: Dos al este (2 E), dos al sur (2 S) ...



- Traza en tu cuaderno la siguiente ruta, desde el punto C al D: (3 S), (4 E), (6 S), (5 O), (2 S), (7 E), (3 N), (1 E), (4 N).

7. Observa el mapa:

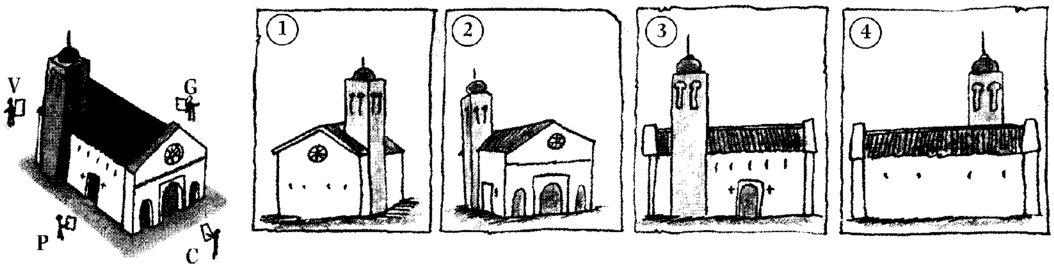


. Dibuja los croquis de itinerarios más cortos para ir desde Vallehermoso a Vistabella y desde Miramar a Zanuí.

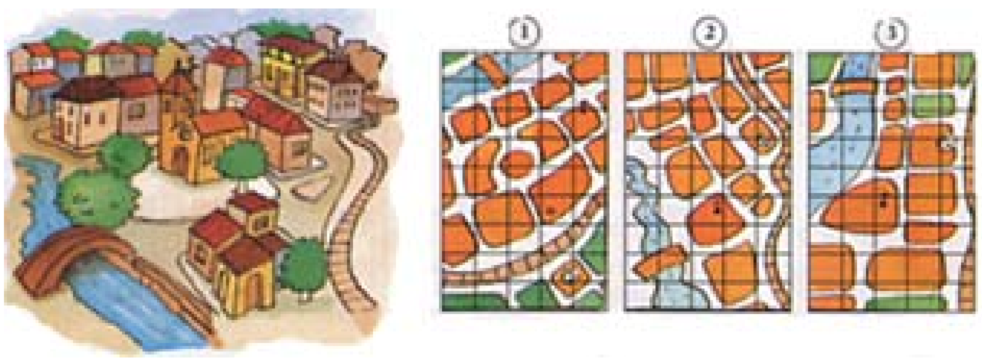
. Escribe las coordenadas de las poblaciones: Vallehermoso, Las Lomas, Estrada, Zanuí.

. Contesta:
¿Qué población está en el punto (6, 5)?
¿Y en el punto (2, 1)?

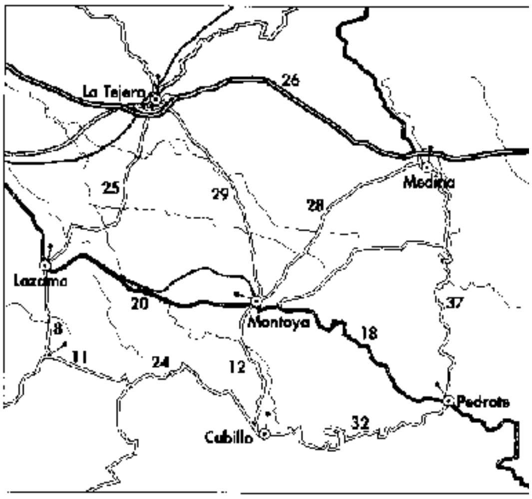
8. Victoria, Gabriel, Carmen y Pilar están dibujando la catedral, cada uno desde la posición en la que están situados. ¿Qué dibujo ha realizado cada uno?



9. Este es el dibujo de un pueblo "a vista de pájaro". ¿Cuál de estos tres planos es el correcto? Justifica tu respuesta.



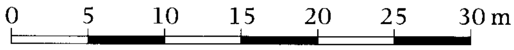
10. En general, en los mapas de carreteras, las distancias entre poblaciones se indican con números situados entre dos señales.



- Mira el mapa y di cuál es la distancia más corta por carretera entre:
  - Lazama y Medida
  - Cubillo y La Tejera

- ¿Qué itinerarios se pueden realizar para ir desde Cubillo a La Tejera?
  ¿Cuál es el más largo?
  ¿Cuántos kilómetros tiene?

11. Fíjate en esta escala gráfica y completa en tu cuaderno.



- 1 cm en el plano representa .... m la realidad
- 3 cm en el plano representan .... m la realidad
- 10 cm en el plano representan .... m en la realidad.

12. ¿Cuántos kilómetros representan 5 cm en un mapa a escala 1: 500.000? ¿Y ocho centímetros?

13. En un mapa, la distancia entre dos poblaciones es de 4 cm. Si en la realidad están separadas 40 km. ¿Cuál es la escala del mapa?

14. Las dimensiones de un campo de fútbol son 110 m de largo y 60 m de ancho. Representa este campo en tu cuaderno de tal forma que 1 cm del plano corresponda a 10 m del terreno. Calcula el área del campo en metros cuadrados y el área del plano en centímetros.

B: Conocimientos Matemáticos

1. ESPACIOS Y GEOMETRÍAS

1.1. Situación introductoria: modelizar el espacio

Un profesor ha preparado en el patio de la escuela la siguiente actividad:

En el jardín, a los bordes de dos calles convergentes (Fig. 1) hemos puesto dos banderines. Disponéis de una cinta métrica. ¿Cuál es la distancia entre los dos banderines? Podéis desplazaros y medir por cualquier sitio, salvo por el césped (espacio entre los banderines). Comprobaremos la estimación tendiendo un hilo entre los dos banderines y midiendo después el hilo.

Describir la solución del problema suponiendo

a)Que se dispone de un plano del jardín.

b)*Que no se dispone de plano.*

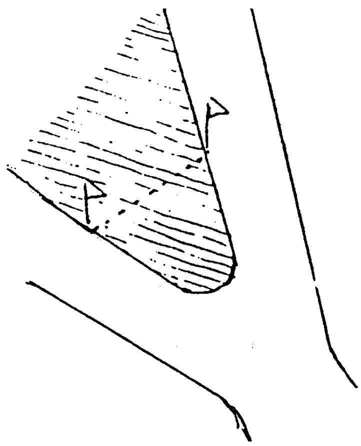


Fig. 1

1.2. Espacio sensible y espacio geométrico

En el apartado 1.1, "Naturaleza de los objetos geométricos", del Capítulo 1 de este bloque temático dedicado a la geometría hemos aclarado que los objetos de que se ocupa la geometría no pertenecen al mundo perceptible. Cuando hablamos de "figuras o formas geométricas" no nos referimos a ninguna clase de objetos perceptibles, aunque ciertamente los dibujos, imágenes y materializaciones concretas son, al menos en los primeros niveles del aprendizaje, la razón de ser del lenguaje geométrico y el apoyo intuitivo para la formulación de conjeturas sobre las relaciones entre las entidades y propiedades geométricas.

El espacio del que se ocupa la geometría debe ser distinguido del espacio de nuestras sensaciones y representaciones materiales para poder entender las diversas geometrías, su razón de ser y utilidad. El espacio euclídeo es continuo, infinito, con tres dimensiones, homogéneo e isótropo (con iguales propiedades en cualquier dirección). Por el contrario, el espacio sensible está compuesto de elementos visuales, táctiles, motores y no es homogéneo ni isótropo. Sin embargo, el dominio de este espacio sensible, es decir la posibilidad de tener un control eficaz del mismo se ve facilitado si el sujeto posee conocimientos sobre el espacio geométrico.

Cuando una persona tiene conocimientos geométricos se puede servir de ellos para razonar sobre el espacio sensible. "Cuando un topógrafo quiere estimar el área de un terreno, no puede pensar en medirlo directamente, es decir, contar el número de unidades cuadradas que contiene. De hecho, el único método usable consiste en operar indirectamente, medir, no áreas, sino longitudes y ángulos y deducir el valor del área gracias a los teoremas y fórmulas obtenidas por métodos deductivos en Geometría y Trigonometría".[1] Para medir la distancia entre los banderines de la situación introductoria que hemos propuesto tenemos que hacerlo usando conocimientos geométricos sobre la representación del espacio sensible mediante figuras y relaciones geométricas. La realización efectiva de las medidas requiere la aplicación de conocimientos sobre el espacio sensible: Si no disponemos de un instrumento de medida de longitudes suficientemente largo tendremos que controlar la alineación de las sucesivas extremidades en la aplicación sucesiva de la cinta métrica. En cada instante el topógrafo recurre a conocimientos relativos al control del espacio sensible y los instrumentos materiales y al modelo geométrico.

Un punto conflictivo de la enseñanza de la geometría es sin duda el de la articulación entre el dominio del espacio sensible y del espacio geométrico. En el espacio sensible el alumno controla sus relaciones efectivas de manera continua con la ayuda de los sentidos. En el trabajo con la geometría, el alumno también entra en relación con objetos del espacio sensible, las figuras (en el sentido de dibujos o trazos). Estas figuras no son representaciones "imperfectas" de unas "verdaderas" figuras geométricas. El alumno debe abandonar el control empírico de sus afirmaciones y pasar a un control por medio de razonamientos. No se trata por tanto solo de cambiar de cuadro, de pasar de un mundo "imperfecto" a un mundo "perfecto", mediante una especie de paso al límite. Se trata de cambiar radicalmente la manera de controlar sus relaciones con el espacio[2]. Sin embargo, no se trata sencillamente de que el sujeto abandone el mundo perceptible y pase a un mundo intelectual, porque este nuevo mundo no es otra cosa que el mundo de las reglas y convenios que nos imponemos para organizar y controlar el mundo sensible. "Se trata de pasar de las relaciones efectivas y contingentes con un cierto espacio a la modelización de las relaciones con este espacio".

Estas reflexiones muestran que para progresar en la comprensión de las dificultades de la enseñanza de la geometría, enseñanza que hace intervenir necesariamente a la vez el modelo geométrico y la realidad física que modeliza, es necesario ir más allá de la simple consideración del tipo de espacio en el que se quiere colocar al sujeto, y estudiar las relaciones establecidas entre el sujeto de una parte y cada uno de los espacios por otra.

1.3. Diversos tipos de geometrías

En los capítulos anteriores hemos estudiado las figuras geométricas y un tipo de transformaciones que se pueden aplicar a las figuras: las isometrías (traslaciones, giros y simetrías). Estas transformaciones conservan las distancias y los ángulos de las figuras a las que se aplican y su estudio constituye lo que se denomina la *geometría euclídea*.

En el 2º capítulo hemos incluido también un tipo de transformaciones que no conservan la distancia, como son las homotecias (dilataciones o contracciones). Estas transformaciones conservan la forma de las figuras, y por tanto, los ángulos y la proporción entre los elementos correspondientes; su estudio constituye la denominada *geometría de la semejanza*.

[1] Frechet (1955), citado por Berthelot y Salin (1992, p. 28)

[2] Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la geométríe dans la scolarité obligatoire. Tesis Doctoral. Universidad de Burdeos. (p. 32).

Mencionamos, a continuación, brevemente otros tipos de geometrías indicando los tipos de transformaciones y propiedades invariantes que las caracterizan.

La *geometría afín* estudia las transformaciones denominadas proyecciones afines, que de manera intuitiva se refieren a las transformaciones inducidas en las figuras al ser proyectas mediante haces de rayos paralelos. En este caso las propiedades que se conservan son el paralelismo de rectas o segmentos, el punto medio de segmentos y la razón de la distancia entre puntos sobre una misma recta (proyecciones paralelas estudiadas en la sección dedicada al teorema de Thales).

La *geometría proyectiva* estudia las propiedades de las figuras que se conservan al ser transformadas mediante una proyección desde un punto. Como ejemplo de tales propiedades está la colinealidad (puntos que están alineados, continúan estando alineados tras la transformación) y la convexidad de las figuras.

1.4. Topología

Es posible aplicar otro tipo de transformaciones a las figuras y cuerpos geométricos distinto de los indicados hasta ahora que da lugar a una rama de las matemáticas que es la Topología. Estas transformaciones son las deformaciones, estiramientos y contracciones sin "rotura" de las figuras, como si estuvieran dibujadas sobre una lámina de goma, y ésta se estirase o encogiese. Reciben el nombre de *transformaciones topológicas* y como propiedades invariantes tenemos, la continuidad, las intersecciones, el orden, el interior y exterior, la frontera. En la construcción de esquemas y croquis espaciales se ponen en juego propiedades topológicas del espacio.

En Topología no interesan distancias, ángulos ni áreas. En términos de geometría euclídea el círculo, cuadrado y triángulo mostrados en la figura 2 son completamente diferentes. Sin embargo, tienen una propiedad común: cada una de esas figuras posee un interior y un exterior; para ir desde un punto exterior a otro interior es preciso cruzar el contorno: se trata de *curvas cerradas simples*.

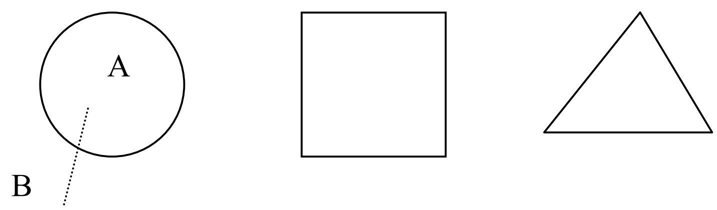


Fig. 2

Si estas figuras se dibujaran sobre una lámina de goma, estirándola se deformarían perdiendo las propiedades que las definen como circunferencia, cuadrado y triángulo, pero conservarían la propiedad de ser curvas cerradas simples. No está permitido, sin embargo plegar, cortar o agujerear ya que en este caso esa propiedad también se perdería.

Un problema célebre de naturaleza topológica es el denominado de los Siete Puentes de Königsberg. Esta ciudad está situada cerca de la desembocadura de un río y parte de ella está construida sobre una isla (Fig. 3). Esta isla y el resto de la ciudad están unidos por siete puentes. El problema propuesto consistía en ver si era posible ir a pasear y volver al punto de partida habiendo cruzado todos y cada uno de los puentes una sola vez. En 1736 el matemático suizo Euler estudió esta cuestión. Descubrió que este problema topológico se conserva en lo esencial si se reemplaza el mapa de la figura 3a por el diagrama más simple o "red" de la figura 3b.

Fig.3a

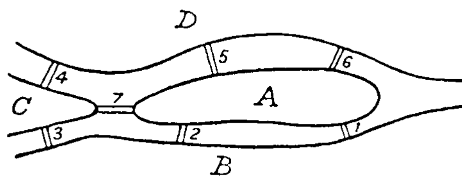
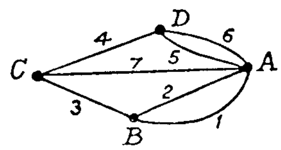


Fig. 3b

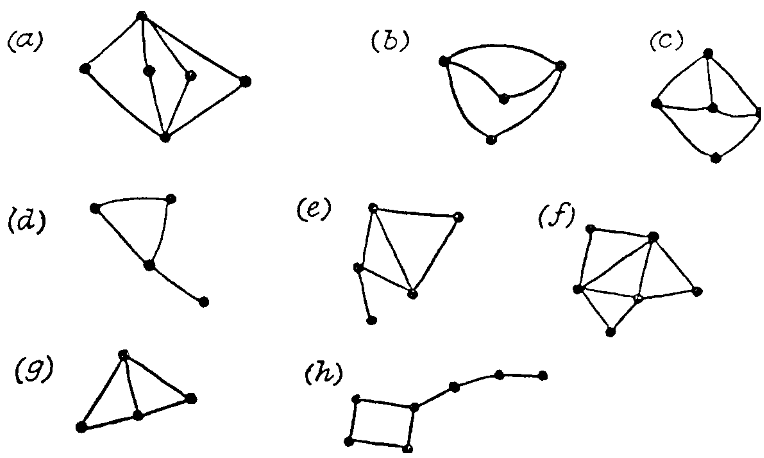


El problema inicial equivale a preguntar si es posible partir de uno de los puntos señalados ("vértices") de la red, recorrer ésta con un lápiz, sin levantarlo del papel, siguiendo cada línea una vez y sola una, y volver al punto de partida

Ejercicios:

1. Estudia el problema de los puentes de Königsberg

2. Ver si es posible recorrer análogamente las siguientes redes (empezando en uno de los vértices a tu elección, recorriendo cada línea una vez y sólo una, y volviendo al punto de partida).

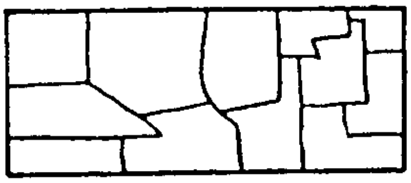


3. Experimenta con otras redes. Si en un vértice se cortan un número par de segmentos se llama vértice par; si es un número impar de líneas el que concurre, se llama vértice impar. Trata de hallar alguna regla para decidir si uno de los caminos de "pasar sólo una vez" es posible o no. Puede servir de ayuda marcar el número de vértices impares de cada red. [Solución, este número debe ser 0 o 2]

Otro problema topológico célebre referido a superficies es el de coloración de mapas. El problema es hallar el menor número de colores necesarios para colorear cualquier mapa que represente varios países, con la condición de que países vecinos (o sea, los que comparten una frontera) deben llevar colores diferentes. Recientemente se ha demostrado que cuatro colores son suficientes para colorear un mapa.

Ejercicio:

4. Trata de dibujar mapas como el de abajo, usando cuatro colores para aplicarlos a los diferentes países.



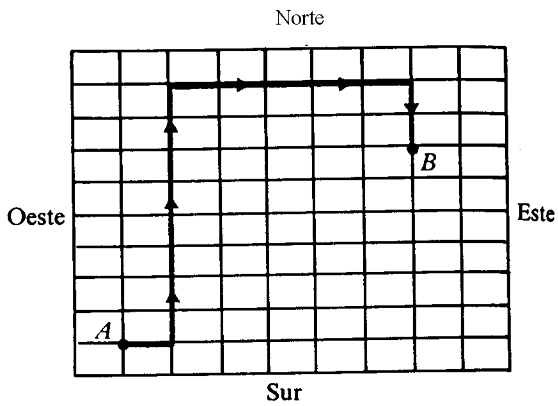
2. LOCALIZACIÓN Y RELACIONES ESPACIALES

Con frecuencia el estudio de la geometría elemental se centra en las formas y figuras geométricas. Sin embargo, una parte relevante de la geometría se ocupa de la posición y el movimiento en el espacio. ¿En qué lugar estás? ¿Estás delante o detrás de la mesa? ¿Estás entre el sofá y la mesa? ¿Dónde estarás si avanzas cinco pasos? ¿Dónde estarás si avanzas cinco pasos y después retrocedes tres pasos? La reflexión sobre las localizaciones y movimientos nos proporciona una manera de describir el mundo y poner un cierto orden en el entorno. También proporciona una oportunidad de construir conceptos matemáticos como los números positivos y negativos (hacia delante y atrás) y destrezas que se relacionan con otros temas, como la realización e interpretación de planos y mapas. Estas experiencias sirven de base para introducir los sistemas de coordenadas.

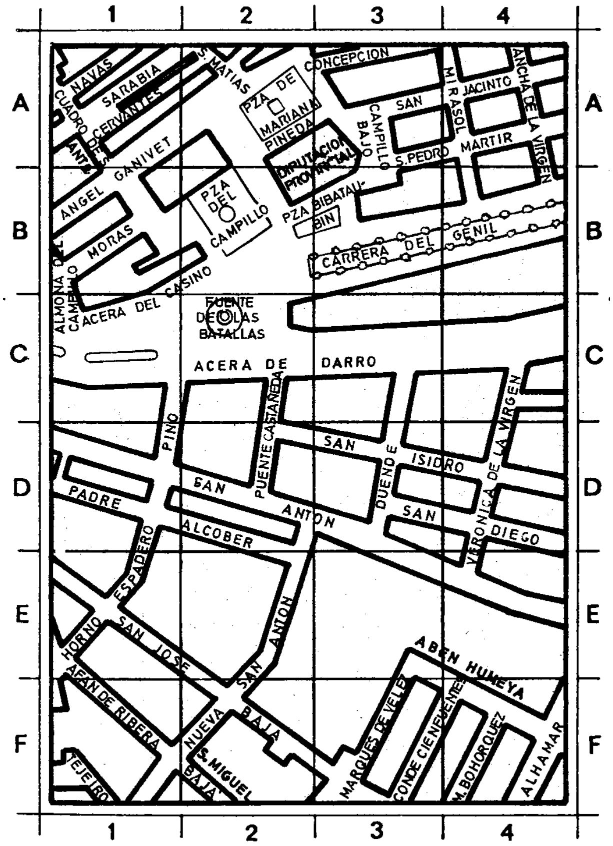
Existen diversos sistemas de coordenadas que permiten representar puntos en un espacio de dos o tres dimensiones. René Descartes (1596-1650) introdujo el sistema de coordenadas bien conocido basado en el par de ejes ortogonales que definen un origen y un segmento unidad para medir distancias sobre los ejes. Es el conocido como sistema de coordenadas cartesianas. Un sistema similar, aunque basado sobre ángulos medidos a partir de una línea base es el sistema de coordenadas polares.

2.1. Localización de puntos: Sistema de coordenadas cartesianas

¿Cómo puede decirse a una persona que vaya de una parte de una ciudad a otra?. Una manera puede ser indicando que recorra cierta distancia en una dirección y luego otra distancia en otra dirección. Por ejemplo, para dar direcciones de manera que se pueda ir del punto A al punto B de la cuadrícula de la derecha, podría decirse: “Ir una calle al este, ocho al norte, cinco al este y dos al sur”. Otra manera más sencilla puede ser decir, “Ir seis calles al este y cinco al norte”.



En matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos en el plano. El punto de intersección de las rectas se llama *origen*. Un par de números llamados coordenadas indican la ubicación de cada punto. En general, un punto se representa por un par ordenado de puntos, las coordenadas (x, y). La notación P(x,y) se usa para referirse a un punto cualquiera, *x* es la abscisa del punto e *y* la ordenada. Este método de determinación de puntos se llama sistema de coordenadas cartesianas. Una variante de sistema de referencia de puntos y regiones en el plano es el usado en los planos y mapas, combinando el uso de números para las abscisas y letras para ordenadas o viceversa, como se muestra en este plano.



Ejercicios:

5. Dos vértices de una figura son (0,0) y (6,0).

a) ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice si la figura es un triángulo equilátero?

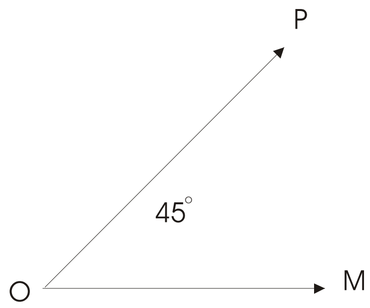
b) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un cuadrado?

c) ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices si la figura es un paralelogramo de altura 4?

6. Considérese un sistema tridimensional de coordenadas, con los ejes x, y, z. Se sitúa un cubo de aristas 4 unidades sobre los ejes y un vértice en el origen. ¿Cuáles son las coordenadas (x, y, z) del centro del cubo?

2.2. Sistema de coordenadas polares

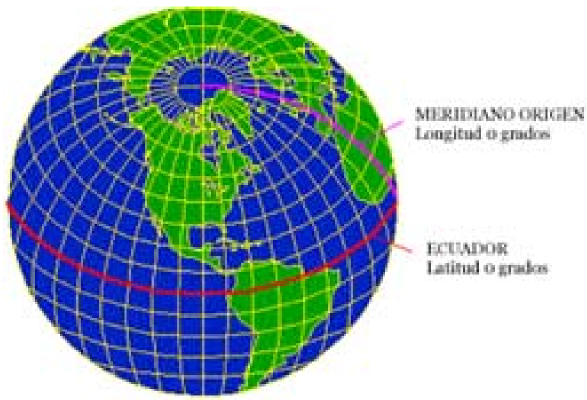
Además del uso de las coordenadas cartesianas, hay otra forma de encontrar puntos en un plano. Por ejemplo, si estamos en el punto O orientados hacia M, para localizar el punto P podría decirse, “girar 45º y avanzar 4 unidades”. La notación usada para esta manera de localizar un punto en el plano es también mediante un par de números (r, θ); el primero indica la distancia que hay que avanzar y el segundo el giro que se debe dar para llegar al punto deseado.



Ejercicio
7. Considérese un sistema de coordenadas tridimensionales con los ejes x, y, z. En él se coloca un cubo cuyas aristas están sobre los ejes y un vértice en el origen. Encontrar la fórmula que permite calcular la longitud de la diagonal del cubo en función de las coordenadas del vértice opuesto al origen.

2.3. Sistemas globales de coordenadas para el posicionamiento de puntos sobre la superficie de la tierra

El sistema de coordenadas más usado en la actualidad es la latitud, longitud y altura. El meridiano origen (Greenwich) y el Ecuador son los planos de referencia usados para definir la latitud y la longitud.



La *longitud geodésica* de un punto es el ángulo que forma con el plano del ecuador la recta que pasa por dicho punto y es normal al elipsoide de referencia.

La *longitud geodesia* de un punto es el ángulo entre un plano de referencia y el plano que pasa por dicho punto, siendo ambos planos perpendiculares al plano del ecuador.

La *altura geodésica* de un punto es la distancia desde el elipsoide de referencia al punto en la dirección normal al elipsoide.

3. MAPAS Y PLANOS TOPOGRÁFICOS

3.1. Utilidad práctica de los mapas y planos

Imagina que te has perdido en un bosque. ¿Qué necesitarías para resolver ese problema?. Con la ayuda de un mapa y de una brújula podrías hacerlo. Si no tuvieras una brújula, pero sí un mapa, podrías orientarte conociendo la posición del Sol o de las estrellas. Sin embargo, si te falta el mapa, sería muy difícil decidir hacia dónde tienes que dirigirte.

A la humanidad le ha tomado muchísimos años representar la superficie de la Tierra. A medida que se han explorado nuevos territorios, se han ido dibujando de diferentes maneras. Cuando ha sido necesario indicar un lago, el contorno de una costa, o cuando se ha querido señalar algún lugar importante, se han trazado croquis, planos o mapas.

Un *mapa* es una representación de la Tierra, o de una parte de ella, generalmente hecha sobre una hoja de papel. Cuando la superficie que se representa es pequeña y no se trata de un continente, de un país o de un estado, sino de una ciudad o parte de ella, lo que se dibuja no es un mapa, sino un plano.

Un *mapa topográfico* es aquel en el que además de estar dibujadas las posiciones relativas de los objetos está representado el desnivel en altura. Estos desniveles se representan dibujando unas líneas llamadas curvas de nivel o isohipsas. Las curvas de nivel unen todos los puntos que están a la misma altura sobre el nivel del mar. Cuando las curvas de nivel están por debajo de la superficie marina se llaman isobatas. En el caso de España el nivel del mar se mide en Alicante.

La cartografía es la ciencia relacionada con la elaboración e interpretación de mapas**.** Los recursos empleados en la confección de mapas son objeto de interés para la Cartografía; desde el conocimiento astronómico y matemático hasta el uso o las aplicaciones cromáticas de la impresión y los programas informáticos utilizados para el tratamiento espacial. Todo ello es parte de la Cartografía.

A lo largo de la historia se han elaborado muchos mapas. Al principio, se hicieron en tabletas de barro cocido, en pergaminos o sobre planchas de metal. Hubo algunos bellísimos, decorados por verdaderos artistas, pero realizados con más imaginación que realidad. En muchos mapas se observaban los nombres de países fantásticos habitados por seres quiméricos. Los cartógrafos que los dibujaban estaban influidos por relatos fantásticos y leyendas. Muchos de ellos señalaban la situación geográfica de la Atlántida, fabuloso continente que se creía sepultado en el océano.

Los mejores mapas fueron los que representaban las costas. Antes de conocer la brújula, los navegantes casi no se aventuraron a perder de vista la tierra por temor a extraviarse en el mar. Se guiaban por el Sol y las estrellas, pero como los instrumentos de observación que tenían eran deficientes y no permitían calcular las distancias con exactitud, los mapas no podían ser precisos. Con el uso de la brújula se abrió una nueva era en la exploración de los mares y se hizo posible la navegación trasatlántica. Así, se conocieron nuevos territorios y fue posible elaborar mapas que representaban mayores extensiones del planeta.

Cuando se demostró que la Tierra era redonda, los cartógrafos se enfrentaron a un gran problema: ¿cómo representar la redondez del planeta en una hoja de papel?. Para comprender mejor este conflicto, imagínate lo siguiente; si tomas una hoja de papel y tratas de cubrir la superficie de una pelota, verás que es imposible hacerlo sin arrugar el papel. Algo parecido sucede con los mapas: es difícil representar la Tierra sin deformaciones en una superficie plana.

3.2. Bases para la realización de los mapas: triangulación y proyección

La realización de un mapa de la Tierra requiere proyectar una superficie esférica sobre un plano, dibujar el relieve y demás características del terreno. Se trata de representar un espacio de tres dimensiones en otro de dos, lo que se consigue mediante procedimientos de triangulación del territorio a cartografiar. La red de triangulación está formada por un conjunto de señales construidas sobre el terreno, a fin de determinar sobre él los vértices de posición. La red geodésica española está formada por tres redes o triangulaciones constituidas por vértices colocados a tres tipos de distancias. La red de primer orden consta de 10 cadenas de triángulos de 50 kms de lado orientadas según el sentido de los paralelos y meridianos. Su base se midió en 1858 en la localidad de Madridejos (Toledo). Los 285 vértices de esta red se apoyan en las cumbres más elevadas de las cadenas montañosas. Esta red de primer orden se complementa con otras que cubre los 19 cuadriláteros formados por las intersecciones de las cadenas principales. Los 288 vértices de las redes están unidos por triángulos de 30 kms de lado. La red de segundo orden, que se apoya en la anterior, tiene 2.150 vértices, y sus triángulos están formados por lados de 20 kms. La red de tercer orden tiene 8.000 vértices y el lado de los triángulos mide de 5 a 10 kms. Por último, hay 9.000 vértices auxiliares a diferentes distancias.

La proyección utilizada para el Mapa Topográfico Nacional (MTN) ha variado desde su inicio en 1858. Primero se utilizó la proyección poliédrica. Cada cara del poliedro es tangente en el centro a la superficie esférica. Actualmente se utiliza la proyección denominada UTM (Universal Transversal Mercator), en la que un cilindro es tangente al elipsoide a lo largo de un meridiano y el eje del cilindro está contenido en el plano del Ecuador. Los husos considerados miden 6º. España está entre los husos 29-30 y 31.

A esta base geodésica de proyección ha de unirse otra serie de trabajos que permitan la medida del relieve y su representación, que son los trabajos topográficos. Para el MTN se comenzó haciendo levantamientos topográficos de forma tradicional tomando como base los términos municipales. La información obtenida se pasaba a borradores a escala 1:25.000. Desde 1956 se utiliza la fotografía aérea. Actualmente la cartografía automática por medio de ordenador supone un progreso decisivo en la confección de las hojas topográficas.

3.3. La red de coordenadas geográficas

La red de coordenadas nos permite la localización exacta de todos los puntos representados en el mapa. Esta red de coordenadas está formada por los paralelos y meridianos.

Longitudes:

Una hoja del MTN está limitada por dos arcos de meridiano entre los que existe una separación de veinte minutos (20') de paralelo. A partir de 1970 se tomó como meridiano origen el de Greenwich. Hasta entonces se tomada el origen en el meridiano que pasaba por el Observatorio Astronómico de Madrid. Al N y S de la hoja aparece la medida de la longitud de minuto a minuto, cada uno de los cuales está dividido en seis partes iguales que representan diez segundos (10") cada una.

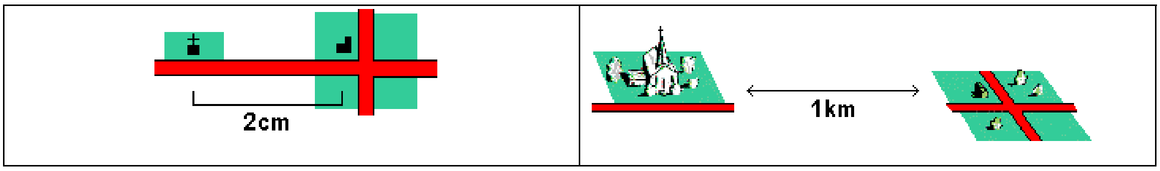
Latitudes:

Una hoja está limitada por dos arcos de paralelo entre los que existe una separación de 10' de meridiano. Todas las hojas del MTN de España tienen latitud Norte (ya que el Ecuador es el origen de las latitudes). Los bordes E y W de las hojas llevan las medidas de la latitud en grados y minutos. Cada minuto aparece dividido en seis unidades de diez segundos (10") cada una.

La localización de cualquier punto de la hoja se puede hacer con exactitud, trazando con una regla una recta hacia su borde N o S y E o W más p´roximo y leyendo su longitud y latitud en los mismos.

3.4. Las escalas

La escala de un mapa o de un plano indica la razón existente entre la medida de las distancias en él representadas y las distancias reales sobre el terreno. Por ejemplo, si 2 cm sobre el mapa representa 1 km sobre el terreno, la escala será 2 cm = 1 km, lo que se expresa habitualmente en forma de razón:



$$\frac{\text{Distancia sobre el mapa}}{\text{Distancia sobre el terreno}} = \frac{2\text{cm}}{1\text{ km}} = \frac{2\text{ cm}}{100.000\text{ cm}} = \frac{1}{50.000}$$

La escala puede expresarse por palabras, por ejemplo, 1 cm por 1 km, por números, ya sea en forma de fracción cuyo numerador es siempre la unidad, por ejemplo1/50.000, en forma de división indicada 1:50.000, o bien gráficamente,

Si la escala viene dada de forma gráfica puede utilizarse para medir directamente las distancias en el mapa y leerlas en distancia real.

Las diferentes escalas nos permiten estudiar fenómenos diferentes. A escala de 1:1 000 y 1:5 000 se pueden estudiar fenómenos de mucho detalle. Se puede dibujar una casa. Se llaman específicamente planos, y es que a una escala tan grande no es necesaria una proyección y se puede considerar la Tierra plana. Con escalas entre 1:5 000 y 1:20 000 podemos representar planos callejeros de ciudades. Entre 1:20 000 y 1:50 000 podemos estudiar comarcas y municipios. Entre el 1:50 000 y el 1:200 000 podemos estudiar provincias y regiones, y las carreteras. Entre 1:200 000 y 1:1 000 000 podemos ver las comunidades autónomas y los países. A escalas inferiores a 1:1 000 000 podemos ver continentes y hasta el mundo entero.

El mapa que mejor permite el análisis geográfico es el de escala 1:50 000, mapas más pequeños permiten una visión de conjunto, y los más grandes un mayor detalle. A esta escala está representado el Mapa Topográfico Nacional.

Ejercicios

8. La superficie de una explotación agraria de forma rectangular es de 80 cm2 en un mapa de escala 1:50.000. ¿Cuál es la superficie real en hectáreas.

9. ¿Qué superficie ocupará en un mapa a escala 1:50.000 una superficie real de 26 hectáreas.

3.5. Representación cartográfica: altimetría y planimetría

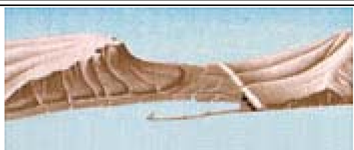
La representación del relieve del terreno es una característica de mucha importancia en los mapas topográficos. En los mapas más antiguos sólo se indicaba la posición de las montañas, a la que se añadía algunos símbolos que daban idea de su altitud; el más utilizado fue el de los perfiles abatidos. Este método consiste en el dibujo del perfil de las montañas abatido sobre el plano horizontal. Mapas babilónicos, egipcios y romanos tienen ya este sistema de representación y continúa utilizándose, con algunos retoques de perfeccionamiento hasta el siglo XVIII. Posteriormente, a finales de dicho siglo, tras la aparición del barómetro y el perfeccionamiento de los teodolitos, fue posible la determinación de las cotas, y la calidad de la representación del relieve mejoró con ello. Otros métodos para representar el relieve han sido utilizados hasta generalizarse en el siglo pasado el uso de las *curvas de nivel* o isohipsas.

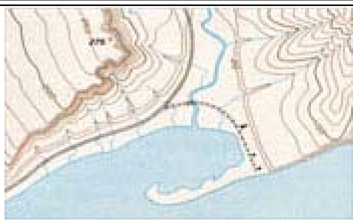
Una curva de nivel o isohipsa es una línea imaginaria que une los puntos de un relieve situados a la misma altura sobre el nivel del mar. También se puede describir como el trazo de una línea de un plano horizontal que corta las superficies inclinadas constituidas por las pendientes de un relieve.

Dentro de un mismo mapa las curvas de nivel son equidistantes, esto es, la distancia vertical que separa dos curvas consecutivas es constante. Esto es imprescindible puesto que de otra forma no representarían fielmente las pendientes del terreno. Esta equidistancia está en función de la escala. Un mapa a escala 1:20.000 puede tener una equidistancia entre las curvas de nivel de 5 o 10 m. En el Mapa Topográfico Nacional a escala 1:50.000 la equidistancia es de 20 m.

En los mapas actuales, las curvas de nivel suelen estar numeradas, al menos las curvas maestras, indicando la altitud absoluta. También algunas cimas o crestas llevan indicada su altura absoluta para que se aprecie mejor los desniveles del relieve.

Las curvas de nivel permiten medir las alturas de las montañas, las profundidades de los fondos marinos y la inclinación de las laderas.





El relieve del terreno se muestra con las curvas de nivel

Además del relieve los mapas llevan impresas una serie de signos convencionales que representan otros tantos hechos o aspectos de la realidad. Estos signos convencionales podemos dividirlos en dos grandes grupos:

1. Indicadores de aspectos naturales (ríos, barrancos, arroyos, lagunas, vegetación, ...)
2. Indicadores de aspectos no naturales, es decir, relativos a la ocupación del medio por el hombre. Estos a su vez se pueden dividir en dos subgrupos:
   - aspectos que no se dan en la realidad (como los límites administrativos)
   - aspectos que aparecen en la realidad y se deben a la acción del hombre (caminos, carreteras, líneas de ferrocarril, casas, pueblos, cultivos, usos del suelo, etc.)

El cálculo de la pendiente

La pendiente es la relación que existe entre el desnivel que debemos superar y la distancia en horizontal que debemos recorrer. La distancia horizontal se mide en el mapa. La pendiente se expresa en tantos por ciento, o en grados.

Para calcular una pendiente en tantos por ciento basta con resolver la siguiente regla de tres: Distancia en horizontal es a 100 como distancia en vertical es a X

Distancia en vertical · 100/Distancia en horizontal = Pendiente%

Para calcular la pendiente en grados basta hallar la tangente del ángulo conocidos los dos catetos:

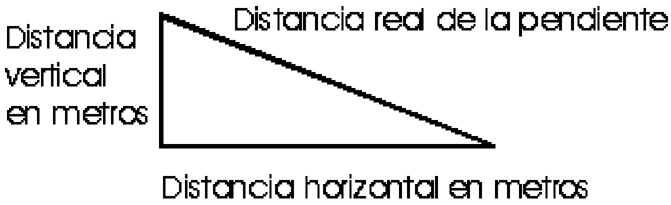
Tangente A = Altura/Distancia

Un ángulo de 45º es una pendiente del 100% ya que cada 100 metros en horizontal se recorren 100 metros en altura.

Cuando medimos una distancia en el mapa lo hacemos sobre una superficie plana. La que medimos en el mapa se llama distancia planimétrica, que no es otra cosa que la proyección en el mapa de la distancia real. La distancia planimétrica coincide con la real sólo si en la realidad hay una llanura, pero si hay una pendiente la diferencia entre la distancia real y la planimétrica puede ser notable.

Para calcular la distancia real debemos hallar el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El valor de un cateto es la distancia en metros entre dos puntos, el valor del otro cateto es el valor en metros de la diferencia en altitud entre los dos puntos. La distancia real es pues:

$$r^2 = h^2 + a^2$$



Donde:
r = distancia real

h = distancia horizontal en la realidad entre los dos puntos
a = diferencia de altura en la realidad entre dos puntos

Para medir la distancia entre dos puntos en línea recta basta con usar una regla, en un plano pocos trazados son rectos. Para medir trazados sinuosos entre dos puntos se pueden usar dos métodos, uno rudimentario, que consiste en colocar un hilo sobre el recorrido y luego medir la longitud del hilo, el otro es usando un instrumento creado al para esto llamado curvímetro.

El corte topográfico

El corte topográfico sirve para hacerse una idea de cómo es el relieve que está dibujado en el mapa. Para levantarlo debemos partir de la información que nos proporciona el mapa, es decir, las curvas de nivel, la distancia horizontal entre dos puntos y la escala.

Para hacer un corte topográfico debemos seleccionar dos puntos del mapa. Trazar una línea recta entre ambos. Luego sobre un papel colocado encima de la línea marcamos todas las curvas de nivel que nos encontremos. Si las curva de nivel están muy juntas basta con que marquemos las curvas maestras. Con esta información nos vamos al papel.

Dibujamos un eje de coordenadas.

El eje horizontal (abscisas) tendrá la misma escala que el mapa. Si se quiere variar habrá que hacer los cálculos oportunos. Sobre esa línea trasladamos las distancias entre las curvas de nivel que tenemos en la hoja.

El eje vertical (ordenadas) tendrá una escala diferente. Lo normal, para poder ver cómodamente el relieve es que esté en la escala 1:10 000, pero podemos elegir cualquiera. Es decir, cada centímetro en el papel serán 100 metros en la realidad.

A continuación levantamos cada punto del eje de abscisas en vertical hasta alcanzar la altitud correspondiente en el eje de ordenadas. Y lo marcamos. Cuando lo hayamos hecho unimos todos los puntos y tendremos un perfil del relieve en línea recta entre los puntos seleccionados.

Para completar el corte debemos poner como mínimo: la hoja en el que se encuentra la zona seleccionada, el nombre de los puntos de los extremos del corte, y si es posible el nombre de las cotas, los ríos y los pueblos por donde pasa, la escala que hemos empleado y el rumbo del corte.

Se pueden hacer también cortes que nos den la imagen del perfil de un trayecto sinuoso. Para ello debemos tomar la distancia entre las curvas de nivel que vayamos atravesando, para poder marcarlas sobre el eje de abscisas. Los cortes sinuosos más habituales son los del trayecto de una carretera (famosos por las vueltas ciclistas) y el perfil de un río, que es siempre descendente.

Si en lugar de hacer un solo corte hacemos varios paralelos y resaltamos las líneas que sobresalen tendremos un corte compuesto, que nos da una idea del aspecto del paisaje.

3.6. El rumbo y la orientación del mapa

Ningún mapa sirve para nada si no podemos identificar el lugar donde nos encontramos dentro de él. Pero una vez situados debemos orientar el mapa, para que las direcciones que se marcan en él sean las mismas que en la realidad. Esto vale tanto para un mapa topográfico como para un plano callejero o un mapa de carreteras.

Para situarnos dentro de un mapa debemos estar en un lugar conocido, en la intersección de dos líneas del mapa que sabemos a qué corresponden en la realidad. Por ejemplo dos calles.

Para orientar un mapa podemos usar dos procedimientos. El primero es colocar el plano paralelo a esas líneas que hemos reconocido. Este método es suficiente en la mayoría de los casos. Se usa mucho para orientar planos callejeros. Una vez orientado podemos saber la dirección que debemos tomar, el rumbo, con sólo saber a qué punto del mapa queremos llegar. El rumbo que marque el mapa es el mismo que debemos tomar en la realidad.

No obstante, en ocasiones no disponemos de esas ayudas, por ejemplo si estamos en una habitación cerrada, y para orientar el mapa necesitamos de la brújula. En una brújula debemos distinguir dos partes importantes: la aguja magnética, que siempre señala al norte magnético, y el limbo que es la rueda donde están marcados los grados de la circunferencia, y el norte.

En todo mapa, a no ser que se diga lo contrario, el norte está en la parte superior de la hoja, el sur en la inferior, el este a la derecha y el oeste a la izquierda. En los mapas en los que esto no es así aparece una rosa de los vientos indicando cual es la dirección del Norte. Para orientar el mapa colocamos la brújula paralelamente a los meridianos, o el borde derecho o izquierdo de la hoja si no hay dibujados meridianos. Entonces giramos la hoja hasta que el limbo de la brújula coincida con la dirección que marca la aguja. En ese momento tenemos el mapa orientado.

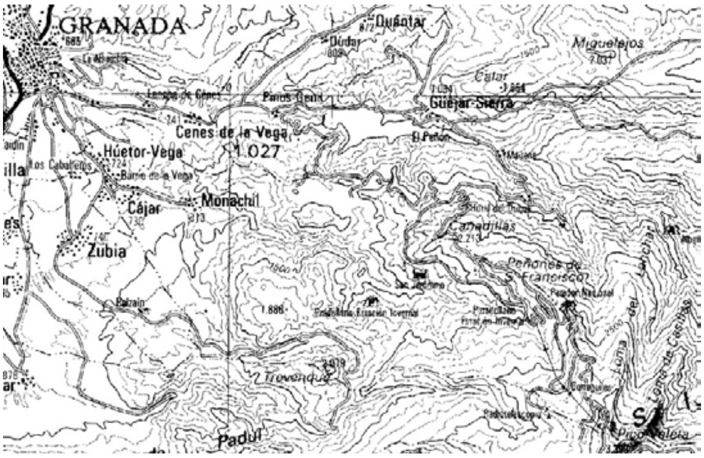
El rumbo es la dirección en línea recta, medida en grados de circunferencia, entre dos puntos. En un mapa para conocer los grados del rumbo entre dos puntos basta con usar un transportador de ángulos. En la realidad ese transportador de ángulos es la brújula. Se comienza a contar desde el Norte y en sentido de las agujas del reloj. Distinguimos tres tipos de norte, el norte geográfico o verdadero, que es el punto de intersección entre el eje de rotación de la Tierra y su superficie. El norte magnético, que es el que señala la brújula. A esta diferencia se le llama declinación magnética y su valor depende de dónde estemos situados. Los buenos mapas indican cuál es el valor de la declinación magnética para el centro de la hoja, y cuál es su variación anual. El tercer norte es el que indica el mapa. Como hemos visto en la mayoría de las proyecciones el norte no es un punto sino toda la línea superior del mapa, y eso hay que tenerlo en cuenta a la hora de hacer cálculos precisos. La diferencia en el centro de la hoja, en los mapas con proyección UTM, entre estos tres tipos de norte es muy pequeña.

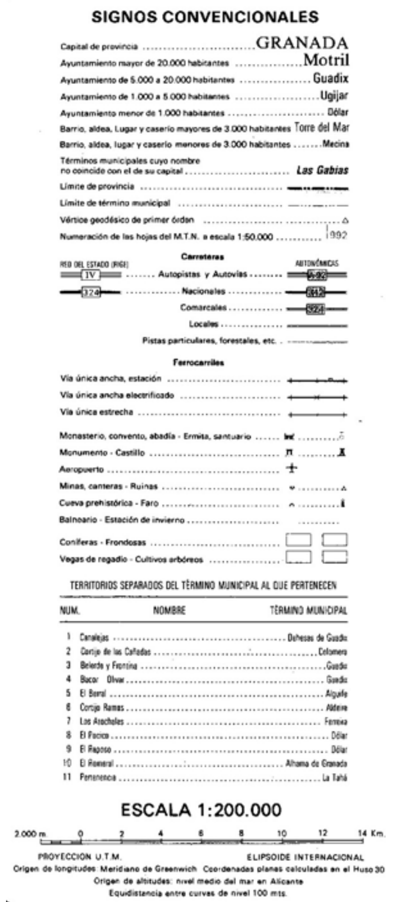
Esta diferencia entre el norte geográfico y el magnético ya la detectó Colón, pero no fue hasta 1831 cuando se encontró el polo norte magnético. Este punto se reconoce porque además de la declinación magnética también esixte la inclinación magmética, que señala el centro de la Tierra. Es cero en el ecuador y de 90º en el polo magnético.

Otra manera de conocer el rumbo en la realidad, sin necesidad de orientar el mapa, es la siguiente. Las brújulas suelen tener un lado recto y un limbo móvil. Colocamos la parte recta entre el lugar donde nos encontramos y el lugar donde queremos ir, con la parte posterior en el lugar donde nos encontramos. Hacemos girar el limbo hasta que quede paralelo a los meridianos y señalando el norte del mapa. Cogemos la brújula en la mano y la giramos hasta que la aguja magnética coincida con el norte que hemos marcado. Entonces el lado recto de la brújula indicará la dirección que debemos seguir.

Ejercicio

10. En el mapa de una parte de la provincia de Granada, que se incluye a continuación, identifica los distintos elementos descritos de los mapas topográficos.





4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Construcción de un panel de orientación. Coordenadas polares[3]

Practicar el juego que se describe a continuación. Analizar y discutir las estrategias posibles de solución.

Material:

- Varias copias de un mapa de la región, provincia, o municipio

- Discos recortados en papel no cuadriculado

- Instrumentos de dibujo

Descripción:

Los alumnos se distribuyen en equipos. Unos reciben un mapa y otros un disco de papel. La actividad consiste en realizar, sobre el disco, un "panel o cuadro de orientación" para un lugar dado (marcado sobre el mapa por un punto bien visible). Este punto se elige por los propios alumnos. Puede ser el mismo para todos o no.

Cada uno de los equipos que dispone de un mapa se asocia con un equipo de los que tienen un disco. Los que tienen el mapa deben proporcionar a los otros los datos que les permitan construir el panel de orientación. Se eligen primero los lugares o localidades que figurarán sobre el panel. Se discute entre los equipos o en toda la clase, ¿Qué datos proporcionar?; ¿Qué instrumentos utilizar? ¿Cómo realizar el panel a partir de estos datos? Una vez construido el panel, ¿cómo se debe colocar sobre el terreno?

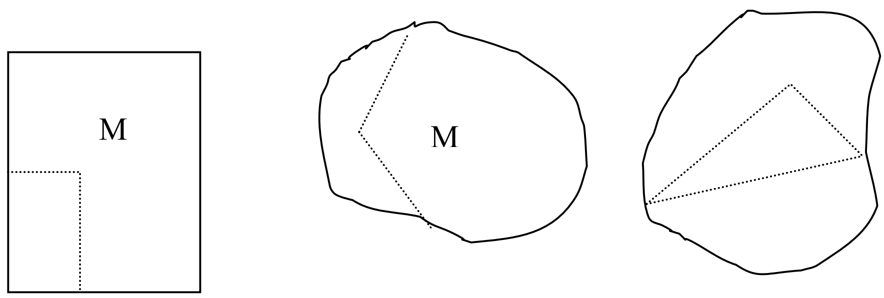
2. El barco perdido. Coordenadas cartesianas y bipolares

Practicar el juego que se describe a continuación. Analizar y discutir las estrategias posibles de solución según la variable didáctica "forma de la hoja".

Material:

- Hojas de papel blanco, no rayadas, trasparentes o traslúcidas, rectangulares o con formas irregulares. Sobre cada una de estas hojas se marca un punto en distintos lugares en las diversas hojas.

- Instrumentos de medida.



Descripción:

Se organiza la clase en equipos, en situación de comunicación entre ellos, es decir, la actividad supone un intercambio de mensajes entre unos emisores y receptores.

[3] Aides Pédagogiques pour le Cycle Moyen. (1983, p. 63)

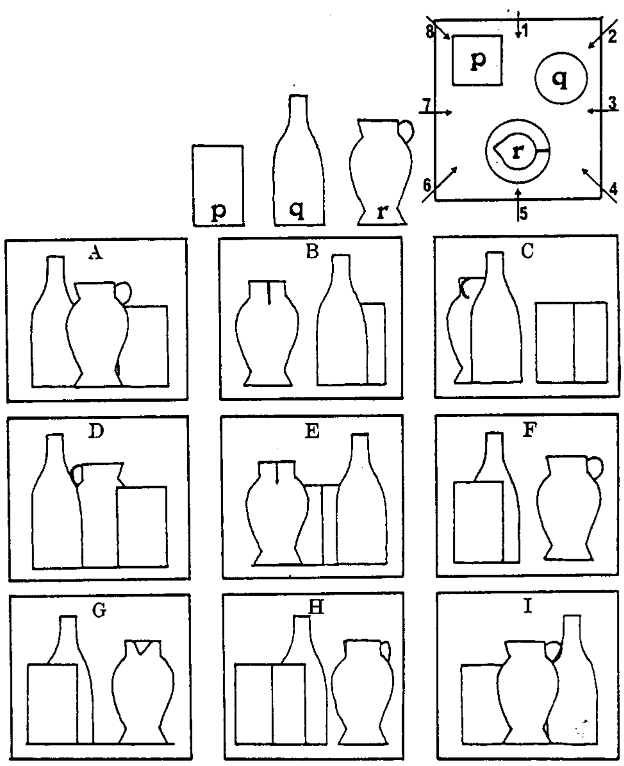
Se imagina que el punto marcado sobre la hoja representa un barco perdido en el mar. El capitán (alumno o equipo) envía mensajes para señalar su posición con el fin de que le localicen y presten ayuda.

El receptor del mensaje puede solicitar al emisor informaciones complementarias, aclaraciones de los mensajes emitidos, precisiones, etc. Para mostrar que el mensaje se comprende y las informaciones son "pertinentes" el receptor debe colorar un punto (de color diferente) sobre su hoja con el fin de marcar la posición del barco que debe identificar. La superposición de las hojas debe permitir el control de los resultados.

3. Puntos de vista

Tres objetos (una caja p, una botella, q y una jarra r) se disponen sobre una mesa como se indica en la figura. Las imágenes que hay debajo representan vistas, según diferentes puntos de vista. Por ejemplo, la imagen I es la vista de la dirección marcada con '5'.

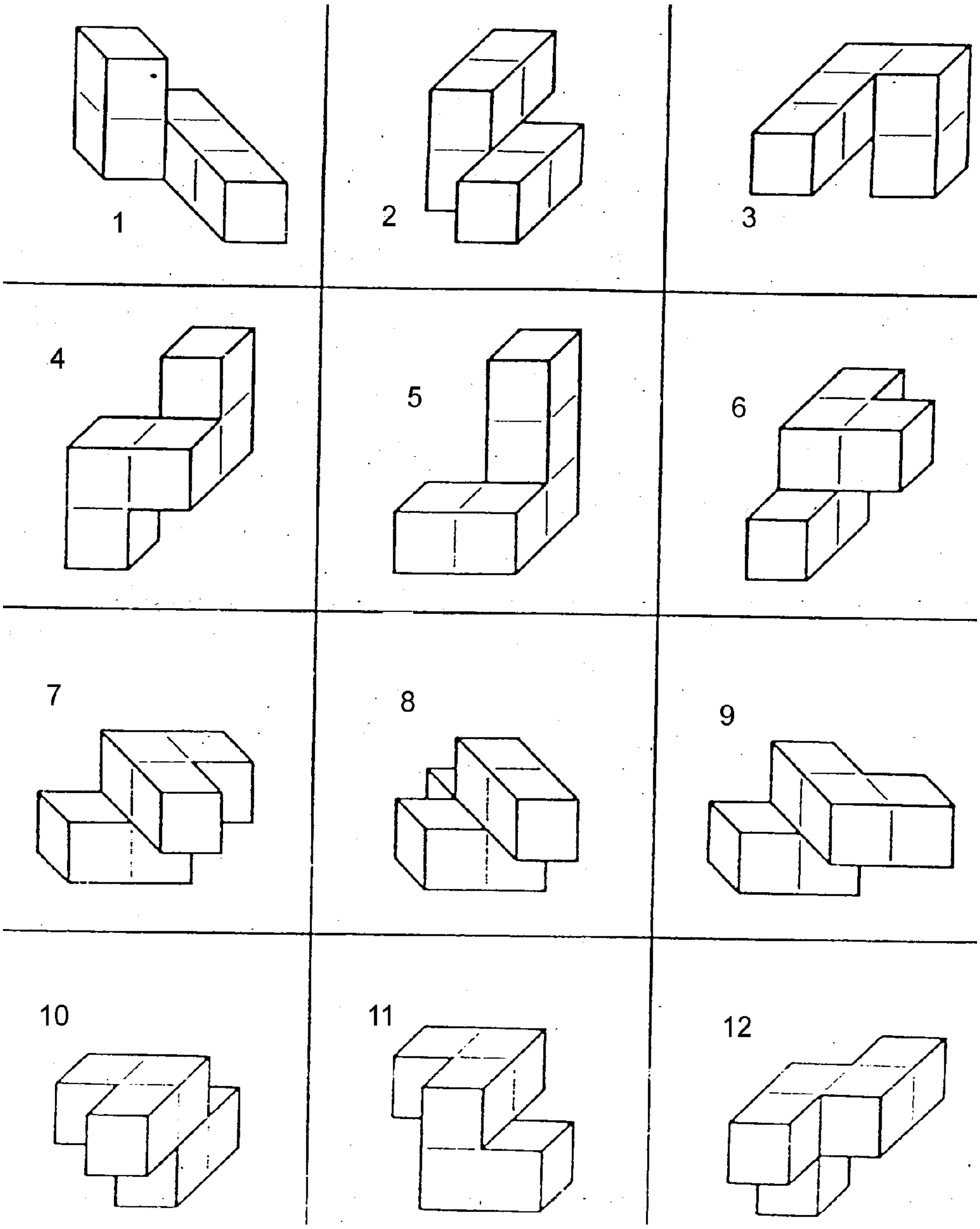
Determinar el punto de vista de cada una de las imágenes. Algunas vistas son FALSAS. ¿Cuáles? ¿Por qué?



4. Orientación en el espacio

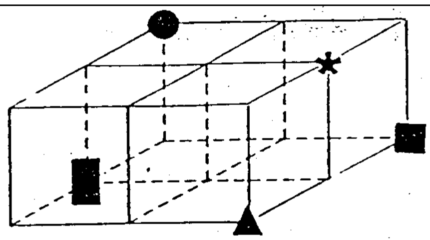
1. Tres sólidos diferentes están representados en diversas posiciones: Determinar qué sólidos son equivalentes. *Respuestas: Sólido A: 1, 3, 5,* *Sólido B :* ______________

Sólido C: ______________

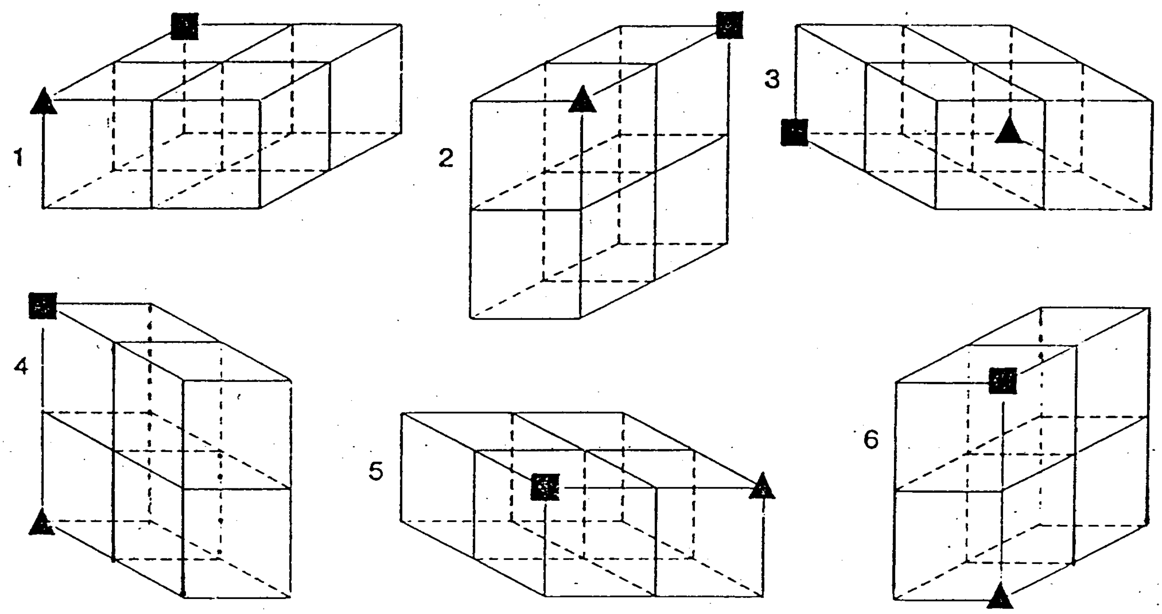


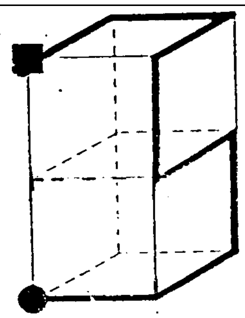
5.

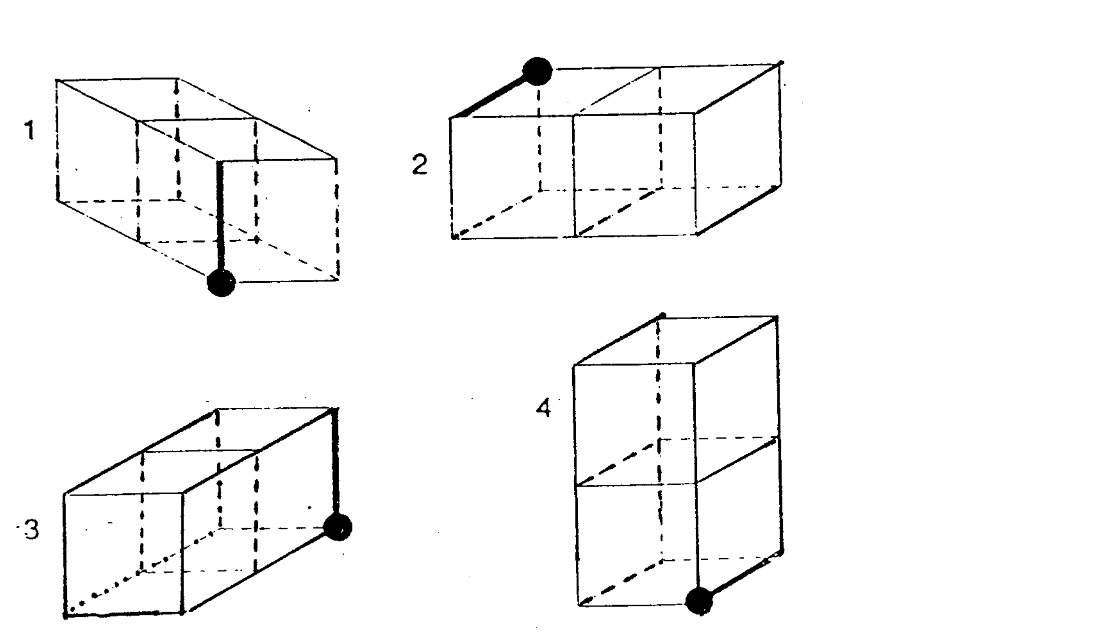
Disponemos de una red compuesta de 4 cubos. Cinco vértices están marcados por un cuadrado, un triángulo, una estrella, un círculo y un rectángulo.



A continuación aparece la misma red en posiciones distintas. Sitúa el círculo, la estrella y el rectángulo en cada uno de ellas.

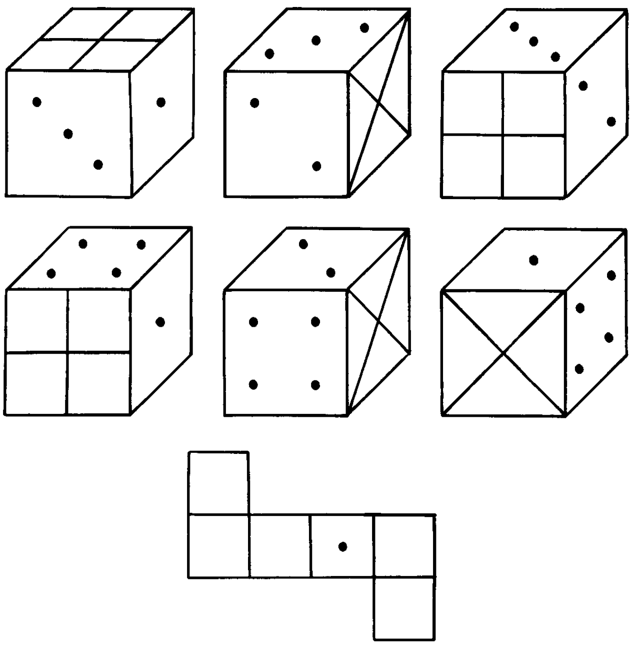


6. Esta red de dos cubos aparece en diferentes posiciones	

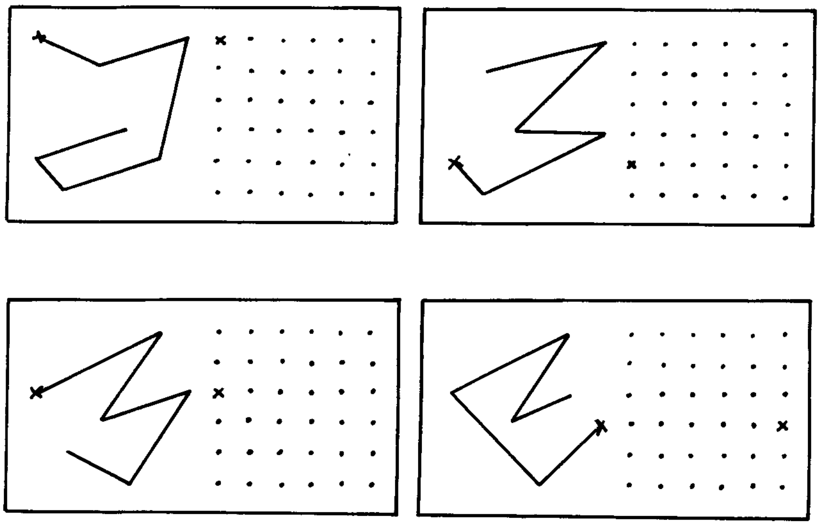


Dibuja el camino que lleva a ■

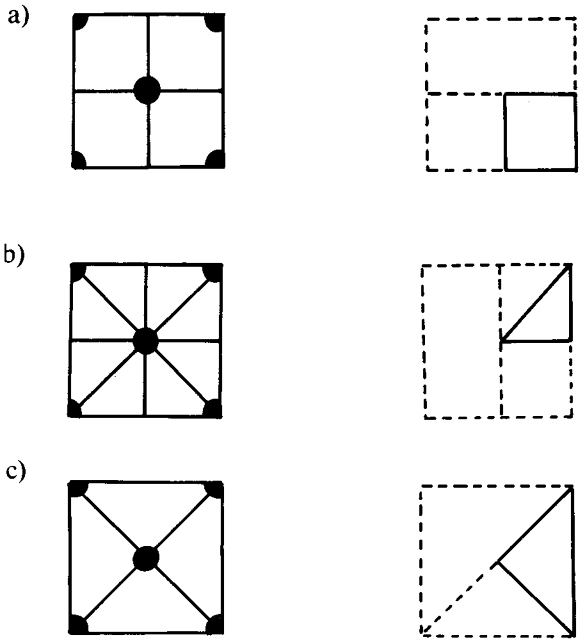
7 Estudiar las seis posiciones dadas de este cubo y completar su desarrollo:



8. Copiar a la derecha en el espacio punteado la figura dibujada a la izquierda, empezando por la señal establecida:



9. Observar bien el dibujo situado a la izquierda y plegarlo mentalmente hasta llegar a obtener la posición indicada en el dibujo de la derecha. Completar la figura plegada dibujando lo que le falta.



10. Problemas de escalas[4]

1) Busca un artlas o u mapa de carreteras que esté dibujado a una escala comprendida entre 1:5.000.000 y 1:1.000.000.

a) Con la regla y un curvímetro (o un cordel si no tienes), mide las distancias que te piden en el cuadro siguiente. A continuación calcula las dimensiones reales.

	Madrid-Granada	Valencia-Sevilla	Burgos- Ávila

[4] Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Plano			
Realidad			

b) ¿Cuál es la población de la costa peninsular que está más cerca de Palma de Mallorca? Expresa la distancia en millas marinas. (Una milla marina = 1.852 metros)

2) Calcula la escala en que ha sido construido un coche miniatura respecto al de verdad si la distancia entre los ejes es de 2 cm y 280 cm, respectivamente.

3) Haz un plano a escala 1:20 de tu habitación y de los elementos más importantes.

4) ¿Cuál es la distancia real entre estas poblaciones?

Barcelona - Madrid (escala 1:1.000.000), distancia en el plano: 18,4 cm

Lérida - Viella (escala 1:500.000), distancia en el plano: 32 cm

Manresa - Vic (escala 1: 200.000), distancia en el plano: 18,4 cm

BIBLIOGRAFÍA

Aides Pédagogiques pour le Cycle Moyen. (1983), Elem-Math VII. Publication de l'A.P.M.E.P., nº 49.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

IV.

MEDIDA DE MAGNITUDES PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Rafael Roa

Índice

Capítulo 1: MAGNITUDES Y MEDIDA

Capítulo 2: MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

IV.

Medida de Magnitudes para Maestros

Capítulo 1:

MAGNITUDES Y MEDIDA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MEDIDA EN PRIMARIA (CAPACIDAD, PESO Y TIEMPO)

Consigna:

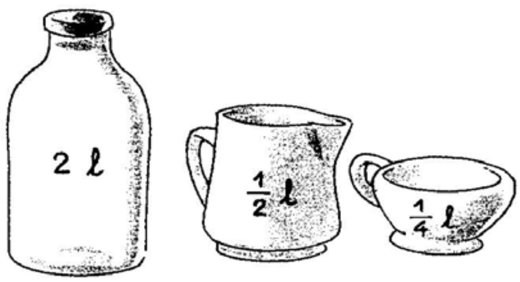
A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas sobre medida no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Observa la capacidad de los recipientes y contesta:

- ¿Cuántas jarras se pueden llenar con el agua de la botella?
- ¿Cuántas tazas se pueden llenar con el agua de la jarra?
- ¿Cuántas tazas se pueden llenar con el agua de la botella?



2. Por la mañana Mónica bebió medio litro de leche y por la tarde bebió un cuarto de litro de leche. ¿Cuántos centilitros de leche bebió en total?

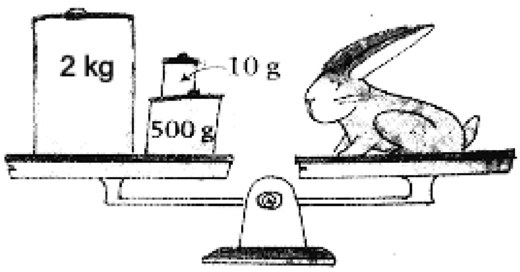
3. Alfredo tomó medio litro de zumo de naranja y su hermana Olga tomó un cuarto de litro. ¿Cuántos centilitros de zumo tomó Alfredo más que Olga?

4. La capacidad de una piscina es de 64 kilolitros. Sólo contiene 59 kilolitros de agua. ¿Cuántos litros de agua le faltan para llenarse?

5. Ricardo compra 6 cajas de espárragos. Cada caja pesa medio kilo. ¿Cuántos gramos pesan las 6 cajas?

6. Calcula el peso en gramos en cada bolsa:

- 2 kg y 250 g =
- 3 kg y 375 g =
- 4 kg y 480 g =
- 5 kg y 750 g =



8. ¿Cuál es el peso en gramos del conejo?

¿Cuánto pesarán aproximadamente cinco conejos?

9. Relaciona con la unidad que expresarías su capacidad o peso.

El peso de un coche	Kilolitros
La capacidad de una piscina	
El peso de una manzana	Litros
La capacidad de una olla	
El peso de un león	Kilos
La capacidad de una bañera	
El peso de un canario	Gramos
La capacidad de la cisterna de un camión	

10. Pepa ha comprado 3 kg de naranjas a 169 ptas el kilo y 4 kg de manzanas a 145 ptas el kilo. ¿Cuánto ha pagado en total?

11¿Qué hora será dentro de 10 minutos? ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que el reloj marque las doce y cuarto?

Dibuja relojes que marquen estas horas:

- Las tres y media
- Las seis menos cinco
- Las nueve y cuarto
- Las cuatro y cinco
- Las ocho menos veinte

Escribe cada una de las horas anteriores tal y como aparecen en un reloj analógico.

12. Laura y Miguel nacieron el mismo año. Laura nació el 13 de Febrero y Miguel el 9 de Diciembre. ¿Cuántos días es mayor Laura que Miguel? ¿Cuántas semanas? ¿Cuántos días hay desde el cumpleaños de Miguel hasta final de año?

13. Las niñas y niños de la clase de Ana han salido de excursión a las nueve de la mañana y han vuelto a las cinco de la tarde. ¿Cuántas horas ha durado la excursión?

B: Conocimientos Matemáticos

1. LA MEDIDA COMO PROBLEMA EMPÍRICO, MATEMÁTICO Y DIDÁCTICO

La medida de magnitudes nos obliga a reflexionar sobre el difícil problema de las relaciones entre las matemáticas y la realidad. Los fenómenos físicos y sociales son organizados mediante el lenguaje matemático y ello nos lleva a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos (problemas, técnicas, símbolos, conceptos, proposiciones, justificaciones, teorías, etc.). Bertrand Russell dedicó varios capítulos de su obra "Principios de la matemática" a reflexionar sobre las nociones de magnitud y cantidad dentro de su enfoque logicista de la matemática.

Las ideas de magnitud, cantidad y medida en diversos contextos

Es importante tener en cuenta que las prácticas y el lenguaje cambian según el contexto institucional en el que se estudia y usa la medida.

- En la vida cotidiana y en las ciencias experimentales se habla de magnitudes para referirse a propiedades o cualidades de los objetos o fenómenos susceptibles de tomar diferentes valores numéricos. "Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad"; "Cantidad es el aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar" (Diccionario de M. Moliner).
- En cambio en las ciencias humanas y sociales esta noción de magnitud y cantidad es demasiado restrictiva, extendiéndose el uso del término magnitud a rasgos de tipo cualitativo (clase social, placer, etc). En este caso, las "cantidades" vienen a ser las distintas modalidades o valores que puede tomar el rasgo o característica del objeto o fenómeno en cuestión.
- En la matemática (pura), como veremos después, con la palabra magnitud se designa un conjunto de objetos abstractos (cantidades) dotado de una cierta estructura algebraica, y medida es un isomorfismo entre dicha estructura y un subconjunto apropiado de números reales.

El profesor, además de conocer estos usos debe saber cómo y por qué enseñarlos en los diferentes niveles educativos, o sea, seleccionar las tareas a proponer, papeles del profesor y de los alumnos, patrones de interacción, tipos de situaciones didácticas a implementar, instrumentos de evaluación, etc.

En lo que sigue tratamos de aportar nuestras ideas y soluciones a estas dos áreas problemáticas - la matemática y la didáctica.

2. PRESENTACIÓN INFORMAL DE LA MEDIDA DE MAGNITUDES

2.1. La actividad de medir. Magnitud y cantidad

Se habla de *medir* (en sentido amplio) para designar la acción de asignar un código identificativo a las distintas modalidades o grados de una característica de un objeto o fenómeno perceptible, que puede variar de un objeto a otro, o ser coincidente en dos o más objetos.

Con esta descripción tenemos en cuenta no sólo la medida habitual de características cuantitativas y continuas como longitud, peso, capacidad, etc., sino que también consideramos "medir" asignar una categoría a rasgos cualitativos como el color de los ojos, la región de nacimiento, el grado de placer que ocasiona un estímulo, etc. Cada modalidad (o grado) es un valor de la variable que representa el rasgo correspondiente.

Magnitud

Habitualmente se suele reservar el nombre de *magnitud* para los atributos o rasgos que varían de manera cuantitativa y continua (longitud, peso, densidad, etc.), o también de manera discreta (p. e. "el número de personas"); las *cantidades* son los valores de dichas variables.

En este caso, *medir* una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad (o cantidades) que se toman como referencia (unidades de medida). Por ejemplo, decimos que el largo de la mesa es 1 m 40 cm. Al hacer una medición asignamos un número y una unidad de medida, o varias, dependiendo de si la cantidad a medir es múltiplo de la cantidad tomada como referencia o no, y de la precisión deseada.

Ejercicios

1. Pon tres ejemplos de atributos o rasgos de objetos que consideres son magnitudes.

2. Pon tres ejemplos de atributos o rasgos de objetos que consideres que no son magnitudes.

3. Describe los requisitos que se exigen a un atributo de un objeto para que digamos que se trata de una magnitud.

Aunque en la educación primaria y en la vida cotidiana las magnitudes que se estudian y usan son cuantitativas, y por tanto, medibles mediante números, es importante tener en cuenta que otros rasgos de los objetos y fenómenos con los que entramos en contacto admiten también una codificación que refleja las clasificaciones y ordenaciones que se pueden hacer con ellos. Existen técnicas estadísticas que permiten encontrar relaciones entre los valores de tales variables cualitativas y ordinales.

Cantidad de magnitud

Es importante distinguir los objetos particulares poseedores de un rasgo (un valor concreto), de la clase de objetos que tienen el mismo valor o cantidad de dicho rasgo.

- Por ejemplo, el largo y ancho de este folio DIN A4 es directamente perceptible por la vista y por el tacto.
- En cambio la clase de los folios DIN A4, no es "un objeto" perceptible. Es una norma que declara DIN A4 a cualquier hoja de papel rectangular que mida 21 cm de ancho por 29'7 cm de largo.

Con el término *cantidad* nos referimos habitualmente al valor que toma la magnitud en un objeto particular (el largo de esta mesa es 1'3 m); pero también hablamos de una longitud o distancia entre dos puntos de 1'3 m. En este caso la cantidad de longitud (o simplemente, la longitud) de 1'3 m hace referencia a cualquier objeto de la clase de todos los objetos que se pueden superponer exactamente con el largo de nuestra mesa, al menos imaginariamente.

Ejercicios

4. Para cada uno de los tres ejemplos de magnitudes que has dado en el ejercicio 1, indica tres ejemplos de cantidades de dichas magnitudes.

2.2. Situaciones de medida

El primer punto de reflexión de la enseñanza de la medida debe ser clarificar los tipos de situaciones o tareas que han llevado, y continúan llevando, al hombre a realizar la actividad de medir ciertas características de los objetos perceptibles. Si queremos que los alumnos entiendan la razón de ser de la medida debemos enfrentarles a dichas situaciones, no tanto para que ellos reinventen por sí mismos las técnicas, sino para que puedan dominar los procedimientos de medida y atribuir un sentido práctico al lenguaje y normas que regulan la actividad de medir.

Situaciones de comunicación

La situación problemática característica de la medida es la de *comunicación* a otras personas separadas en el espacio o en el tiempo, de cuántas cosas tenemos, o de cuál es el tamaño (dimensiones) de los objetos y cómo cambian las cantidades como consecuencia de ciertas transformaciones.

La imposibilidad o dificultad de trasladar la colección o el objeto en cuestión en el espacio o en el tiempo, debido al tamaño o naturaleza de los mismos, lleva a tomar un objeto (o varios) de referencia que sí se pueden trasladar o reproducir. Dichos objetos de referencia son las unidades o patrones de medida.

> Ejemplo: Podemos usar una simple cuerda para informar a otras personas (o a nosotros mismos) del ancho de un mueble para ver si cabe en una pared, o las marcas hechas sobre un palo para informar y recordar cuántas ovejas tenemos en el redil en un momento dado.

Comparación y cambio

Otro tipo de situaciones de medida es la *búsqueda de relaciones* entre cantidades de dos o más magnitudes, actividad que caracteriza el trabajo del científico experimental.

> Ejemplos: ¿Cómo varía el espacio recorrido por un cuerpo al caer por un plano inclinado en función del tiempo transcurrido?
>
> También en la vida diaria se presentan estas situaciones de búsqueda de relaciones entre cantidades: Si esta porción de fruta (1 kg) cuesta 80 céntimos, ¿cuánto debo cobrar a un cliente por esta bolsa?

Afortunadamente no todas las situaciones son distintas unas de otras, sino que hay tipos de situaciones o tareas para las que se pueden usar las mismas técnicas e instrumentos. Se cuenta de la misma manera las ovejas del redil, o el número de árboles de la finca; se mide igual el largo de este folio que el ancho de la mesa. Nos interesa identificar, describir y enseñar estas invariancias de situaciones, técnicas y lenguaje (oral y escrito) para legar a las generaciones venideras nuestros *artefactos de medida*, incluyendo el lenguaje de la medida.

Ejercicios

5. Pon tres ejemplos de situaciones prácticas en las que sea necesario medir las cantidades de una magnitud.

6. Para cada uno de los ejemplos de la pregunta 5 indica las unidades de medida que se consideran habitualmente como más adecuadas.

7. Indica los instrumentos convencionales para medir las cantidades que has elegido en la pregunta 5.

8. Describe la diferencia entre "magnitud", "cantidad de magnitud" y "medida de una cantidad".

2.3. Escalas de medida y tipos de magnitudes

Escala nominal: Hay rasgos cuyas distintas modalidades permiten clasificar los objetos y fenómenos a los cuales se atribuyen, pero dichos valores no se pueden ordenar ni tiene sentido realizar acciones de agregación o de separación con ellos. Se dice que, en estos casos, se usa una escala de medida nominal. Los códigos asignados funcionan como etiquetas identificativas, pero no se puede operar algebraicamente con ellos. No tiene sentido agregar el color azul con el negro cuando hablamos del color de los ojos de un grupo de personas.

Escala ordinal. Hay otros rasgos cuyas cantidades o valores se pueden ordenar de mayor a menor, pero no se pueden agregar. Por ejemplo, en una cola para entrar a un espectáculo podemos observar el lugar que ocupa cada persona (1º, 2º, 3º, ...); aquí no tiene sentido tomar dos personas "agregarlas" y decir el orden que ocupa "el objeto agregado". En estos casos se dice que la escala en la que se mide el rasgo correspondiente es ordinal.

Magnitudes intensivas. Existen rasgos para los que tiene sentido agregar los objetos que los soportan pero la cantidad del rasgo en el objeto agregado no es proporcionalmente aditiva. Esto ocurre, por ejemplo, con la temperatura, la presión, la densidad. Podemos mezclar dos cantidades iguales de un líquido a temperaturas de 20º y 30º, respectivamente, y la cantidad que se obtiene agregando los dos líquidos sigue teniendo el rasgo de la temperatura, pero ésta no es la suma de las temperaturas de los líquidos en cuestión. En estos casos se habla de magnitudes intensivas.

Magnitudes extensivas. En otros rasgos, como la longitud, el peso, el área, etc.; estas magnitudes se pueden describir como "proporcionalmente agregables", y la escala de medida correspondiente se dice que es de razón. También se habla en este caso de magnitudes extensivas o sumables: la cantidad de magnitud de un objeto compuesto de partes se obtiene agregando las cantidades de cada parte (esta operación de agregación se considera también como *suma* de cantidades).

Ejercicios

9. Hemos realizado una encuesta a un grupo de alumnos. Indica cuáles de las siguientes características corresponden a una escala de medida nominal y ordinal. ¿Cuáles corresponden a magnitudes extensivas?: Peso, religión, número de hermanos, deporte preferido, número de orden de nacimiento respecto a sus hermanos, color de pelo, talla, piso en que vive.

10. La altitud sobre el nivel del mar, ¿es una magnitud extensiva?

2.4. Precisión y errores de medida

Al medir cantidades de magnitudes continuas cometemos *errores* por diversas causas –que van desde el propio procedimiento hasta fallos de la persona que mide. Por tanto, los valores que obtenemos son aproximados. El error de una medida también puede estar motivado por los errores sistemáticos del instrumento, que pueden deberse a defectos de fabricación, variaciones de la presión, la temperatura o la humedad. Estos errores no pueden eliminarse totalmente y para que su valor sea lo más pequeño posible se realizan pruebas de control que consisten en cotejar las medidas con las de un objeto patrón.

En el proceso de medir es necesario, por tanto, estimar el error que se comete al tomar ese valor. La *precisión* de un instrumento de medida es la mínima variación de magnitud que se puede determinar sin error. Un instrumento será tanto *más preciso* cuanto mayor sea el número de cifras significativas que puedan obtenerse con él.

- Para *estimar* la medida de una cantidad, acercándose lo más posible al valor exacto, hay que repetir la medida varias veces, calcular el valor medio y los errores absolutos y las medidas de dispersión correspondientes.
- El *error absoluto* de una medida cualquiera es la diferencia entre el valor medio obtenido y el hallado en la medida.
- El *error de dispersión* es el error absoluto medio de todas las medidas. El resultado de la medida se expresa como el valor medio "más, menos" el error de dispersión
- Metrología es la ciencia que tiene por objeto el estudio de las unidades y de las medidas de las magnitudes; define también las exigencias técnicas de los métodos e instrumentos de medida.

Ejercicio

11. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2 6.3 6.0 6.2 6.1 6.5 6.2 6.1 6.2

- Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿ Qué harías para calcularlo ?
- Determina el error absoluto de cada una de las medidas y el error de dispersión

2.5. Sistemas irregulares y regulares de unidades de medida

Cuando la medida no es entera hay que recurrir a un encuadramiento.

Ejemplo: Si deseamos medir el largo de la mesa usando como unidad el largo de un folio DIN A4 diremos que la medida está entre 6 y 7 folios. Si esta medida es demasiado grosera para el fin que pretendemos podemos tomar una unidad más pequeña, por ejemplo, el ancho del folio, o la anchura de un alfiler. En este último caso podríamos precisar que el largo de la mesa está comprendido entre 1400 y 1401 anchos de alfiler.

En el ejemplo anterior, también podemos usar las tres unidades, afirmando que el largo de la mesa mide 6 largos de folio, 1 ancho de folio y entre 150 y 151 alfileres. Esta manera de expresar la medida, usando varias unidades para aumentar la precisión se dice que es una *expresión compleja* de medida.

En este ejemplo hemos usado un *sistema irregular* de unidades de medida, lo que plantea problemas a la hora de realizar cálculos y conversiones entre las distintas unidades. Por ello es aconsejable adoptar *sistemas regulares* de unidades. Un sistema regular para la longitud podría ser, siguiendo con el ejemplo del largo de un folio como unidad principal, tomar como primera subunidad la mitad del folio, la siguiente, la mitad de la mitad, etc., y como sobreunidades (múltiplos), el doble de un folio, cuatro folios, etc.

En principio cualquier sistema regular podría ser válido y cómodo para expresar las mediciones, pero hay razones que justifican el uso de un sistema común y universalmente aceptado de medidas. Ello permite comunicar los resultados de las medidas a cualquier parte, sin necesidad de llevar consigo las unidades adoptadas. Decir que la masa de un objeto es 3 u_2 1 u_1 supone no decir nada a quien desconoce las unidades u_2 y u_1, de manera que se impone el uso común de un sistema de medida previamente acordado. Estos sistemas de medida reciben el nombre de *legales,* pues su uso ha sido regulado mediante leyes.

Nuestro sistema legal y el de todo el mundo, a excepción de los países anglosajones que se encuentran en proceso de cambio, es el *Sistema Métrico Decimal*, que naturalmente es un sistema regular en el que los cambios se realizan de diez en diez (decimal) en las magnitudes lineales, y según potencias de diez en las otras magnitudes.

Ejercicios

12. Virginia avanza un metro, aproximadamente, cada dos pasos. En un paseo ha recorrido 1 hm, 8 dam, 9 m y 50 dm. a) ¿Cuántos pasos ha dado, aproximadamente? b) Expresa la medida compleja dada en este enunciado para la distancia recorrida por Virginia usando como única unidad el metro.

13. Indica la magnitud, las cantidades, y las unidades de medida que se ponen en juego en el problema 12.

2.6. Significado de la medida de magnitudes

A continuación presentamos una síntesis de los “objetos" (perceptibles y abstractos), así como las acciones (reales y mentales) que se ponen en juego en el proceso de medida de magnitudes. Se ejemplifican en el caso de la magnitud peso.

(1) Fenomenología (situaciones, tareas):

Son las situaciones en las cuales se tiene necesidad de medir cantidades. Una situación prototípica que motiva la medida del peso puede ser: Si un kilo de trigo vale 0'2 euros, ¿cuánto valdrá mi cosecha? Si un gramo de oro vale 30 euros, ¿cuánto me pagarán por este anillo?

(2) Elementos perceptibles (objetos reales, notaciones):

- Objetos materiales soportes de la cualidad que se mide, unidades de medida, instrumentos de medida.
- Objetos lingüísticos /notacionales: 'peso', 'gramo', g, hg, kg, escrituras alfanuméricas para expresar cantidades y medidas.

(3) Acciones (operaciones, técnicas):

- La acción de medir efectivamente requiere el dominio de una técnica que depende de los instrumentos de medida. Las destrezas requeridas en el caso del peso para el manejo de la balanza de platillos son bien distintas de una balanza de resorte o una balanza electrónica.
- Se requiere hacer cálculos aritméticos (sumas y productos del número de unidades por su valor).

(4) Conceptos y proposiciones (atributos, propiedades):

- La cualidad designada con el nombre 'peso' atribuible a todos los objetos materiales. "Todo cuerpo pesa", es una abstracción empírica de cierto tipo de experiencias con los objetos materiales.
- Desde el punto de vista matemático se puede describir como un conjunto de objetos homogéneos entre cuyos elementos se puede definir una suma y una ordenación que le dota de la estructura de semimódulo $(M, +, \leq)$.
- Cantidad de peso de un objeto material; todos los objetos que equilibran una balanza se dice

que tienen la misma cantidad de peso. Cada uno de los elementos del conjunto M.
- Tipos de magnitudes (discretas, continuas, absolutas, relativas), extensivas, intensivas.
- La medida como una clase de acciones reguladas que establece la equivalencia entre una cantidad y una colección de cantidades tomadas como unidades.
- La medida como aplicación del conjunto M en un conjunto numérico.
- Unidad de medida; cantidad usada como elemento de comparación reiterada.
- Valor de la medida con una unidad particular (número real positivo).
- Medida concreta (el par, [número, unidad de medida]).
- Invariantes del proceso de medida como función matemática:
  $m_u(a+b) = m_u(a) + m_u(b)$; $m_u\,(ka) = km_u(a)$.
- La precisión de la medida empírica. Si la pesa menor de la que disponemos es el gramo y el fiel de la balanza al colocar 51g está a un lado y al poner 52g está al otro lado decimos que el peso está comprendido entre 51 y 52 gramos y que el error que se comete al medir el peso es menor que 1g.
- Sistema métrico decimal (en realidad se trata de otro complejo praxeológico).

(5) Argumentos y pruebas:
- Justificaciones de las técnicas de medida, de la necesidad de un sistema convenido de unidades y de los invariantes matemáticos característicos.

Ejercicio

14. En una prueba escrita un alumno escribe:
  625/5 = 125 = 125 cm

a) ¿Es correcta esta expresión?
b) ¿Qué explicaciones y comentarios darías a este alumno?

2.7. Conexiones entre distintas magnitudes

Magnitudes discretas y número natural

En muchas situaciones prácticas nos interesamos por una característica de las colecciones de objetos que podemos designar como "la numerosidad", ¿cuántos árboles hay en este bosque?, ¿cuántas personas hay en la sala?, etc. Como respuesta a estas situaciones hemos inventado diversas técnicas de contar, siendo la más eficaz, y generalmente usada, pronunciar la llamada "cantinela numérica": uno, dos , tres, ..., o escribir los símbolos, 1, 2, 3, ...

Ejemplo: Si estamos tratando con conjuntos de personas decimos, por ejemplo, que hay 35 personas, si tratamos con árboles, 235 árboles, etc. Estas expresiones corresponden a cantidades de las magnitudes discretas "número de personas", "número de árboles" (o bien, la cantidad o numerosidad de ....).

Observa que hay que diferenciar entre las *cantidades de estas magnitudes* y las palabras o símbolos, 1, 2, 3, ... que sólo son instrumentos lingüísticos para contar. Con ellos se opera (suman, restan, multiplican, dividen, se comparan, obteniendo una estructura algebraica bien caracterizada), pero estas operaciones son de una naturaleza esencialmente diferentes a las operaciones que se pueden realizar con las cantidades de magnitudes discretas (agregar, componer, descomponer, etc.). Hay un isomorfismo formal entre (N, +, ≤) y cualquier magnitud discreta, de manera que podemos decir que el conjunto de cantidades de cualquier magnitud discreta es un "conjunto naturalmente ordenado".

Pero esta identificación formal no debe llevar a considerar a (N, +, ≤) como otra magnitud discreta. Los números naturales son el sistema de simbolos usados para medir las magnitudes discretas, pero ellos en sí mismos, no deberían ser considerados como una magnitud, a pesar de que tengan la misma estructura matemática.

Masa y peso

Desde un punto de vista físico, masa y peso son magnitudes diferentes. La masa de un cuerpo es el contenido en materia de dicho cuerpo (dejamos sin aclarar qué es la materia), mientras que el peso es la fuerza con que la Tierra (u otro cuerpo) atrae a un objeto. La diferencia se aclara porque objetos de la misma masa tienen un peso diferente en la Luna que en la Tierra, o situado uno en una montaña elevada. Sin embargo, objetos de igual masa situados en un mismo lugar de la Tierra tienen el mismo peso.

La identificación de ambas magnitudes a nivel popular es muy grande y muchas expresiones usuales lo ponen de manifiesto. En la práctica escolar es imposible que ambas características de los cuerpos puedan ser distinguidas; además, los instrumentos usados para medir masas en realidad miden pesos, por lo que no parece procedente hacer distinciones entre ambas magnitudes en los niveles de educación primaria.

Ejercicios

15. Marta compra 9 botes de mermelada. Cada bote pesa un cuarto de kilo. ¿Cuántos gramos pesan los 9 botes? ¿Cuánto pesarán estos botes en la Luna? ¿Seguirán teniendo la misma masa?

16. Para hacer una tarta Iván utiliza 125 g de harina y 250 g de azúcar. ¿Cuántos kilos de harina y azúcar se necesitan para hacer 8 tartas iguales?

Volumen y capacidad

El término *volumen* se usa para designar la característica de todos los cuerpos de ocupar un espacio. Se trata de una magnitud extensiva, derivada, cuya unidad principal es el metro cúbico (m^3). Se usa la palabra *capacidad* para designar la cualidad de ciertos objetos (recipientes) de poder contener líquidos o materiales sueltos (arena, cereales, etc.).

En realidad no se trata de una magnitud diferente del volumen: la capacidad de un recipiente coincide con el volumen del espacio interior delimitado por las paredes del recipiente, y viceversa, el volumen de un cuerpo coincide con la capacidad de un recipiente que envolviera completamente a dicho cuerpo. Cuando se habla de capacidades la unidad principal es el litro (l) que es el volumen de 1 dm^3.

Ejercicios

17. Un depósito contiene 8 kilolitros de agua. Se han sacado 489 litros. ¿Cuántos litros de agua quedan en el depósito? ¿Cuántos metros y centímetros cúbicos?

18. Identificación de situaciones de medida y referentes
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar capacidades.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio, ...) para la medida de capacidades.
- Hacer una lista de unidades de capacidad y capacidades a medir y relacionar cada una con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de capacidades y decir cuál es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de capacidad.

19. Estimar medidas extremas o especiales de capacidad (una cucharita de café, capacidad de un maletero, etc.).

Área y superficie

Con frecuencia estas palabras se usan de manera indistinta, pero es necesario distinguir dos conceptos diferentes, aunque relacionados. Si nos fijamos en los cuerpos o figuras geométricas debemos distinguir entre la forma que tienen (esférica, piramidal, rectangular, plana, alabeada, etc.) y la mayor o menor extensión que ocupan. La palabra *superficie* se debería reservar para designar la forma del cuerpo o figura (superficie plana, alabeada, triangular), mientras que la palabra *área* debería designar la extensión de la superficie. El rasgo o característica de los cuerpos que se mide cuantitativamente es el área o extensión.

2.8. El Sistema Internacional de unidades (SI)

Este es el nombre adoptado por la XI Conferencia General de Pesos y Medidas (celebrada en París en 1960) para establecer un sistema universal, unificado y coherente de unidades de medida, basado en el sistema mks (metro-kilogramo-segundo). Este sistema se conoce como SI, iniciales de Sistema Internacional. En la conferencia de 1960 se definieron los patrones para seis unidades fundamentales y dos unidades complementarias; en 1971 se añadió una séptima unidad fundamental, el mol. En la tabla 1 se indican las unidades fundamentales y complementarias.

Tabla 1: Magnitudes fundamentales y complementarias

Magnitud	Nombre de la unidad básica	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente electrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd
Magnitudes complementarias:		
Ángulo plano	Radián	rad
Ángulo sólido	Estereoradián	sr

2.9. Medida directa e indirecta de cantidades

Las cantidades de una magnitud pueden ser medidas en unos casos *directamente* usando los instrumentos de medida (el metro, sus múltiplos y divisores para las longitudes; el kg, sus múltiplos y divisores para el peso, etc.). Esta medición directa quiere decir aplicando reiteradamente las unidades de medida hasta lograr cubrir la longitud que se quiere medir, hasta conseguir equilibrar la balanza, etc., y según la precisión deseada.

En otros casos, si el objeto en cuestión no puede medirse directamente, bien por su tamaño, forma, etc., pero se puede descomponer en partes o secciones cuya medida se conoce, podemos determinar la medida del objeto mediante operaciones aritméticas. Se habla entonces de *medida indirecta*.

Ejemplo: No hace falta recubrir una superficie de losetas para determinar el área de dicha superficie. Ésta se puede determinar con frecuencia mediante el cálculo sobre las dimensiones de la superficie.

Una vez definida la unidad de medida para ciertas magnitudes, a partir de estas unidades se pueden definir las correspondientes a otras magnitudes. Las primeras se conocen como magnitudes fundamentales y las segundas como magnitudes derivadas. El carácter fundamental o derivado de una magnitud no es intrínseco a la misma. Un sistema de unidades establece y define con precisión cuáles son las unidades fundamentales.

Ejercicios

20. Citar tres situaciones en las que sea útil la estimación de medidas.

21. Indica cuál es aproximadamente el consumo medio mensual de agua en una familia estándar de cuatro miembros.

Medida indirecta de áreas y volúmenes

El estudio escolar de las magnitudes área y volumen debe incluir una primera etapa de identificación de la característica correspondiente de los objetos (superficies y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas), siguiendo el proceso que se describe más adelante. Pero en la práctica las cantidades de áreas y volúmenes se miden de manera indirecta mediante el cálculo a partir de las medidas lineales de las dimensiones de las figuras o cuerpos. Así, la medida del área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud de la base por la altura (A = b x a), y el volumen de un ortoedro, multiplicando las longitudes de las tres aristas que concurren en un vértice (V = a x b x c).

Ejercicios

22. Con una cuerda de 16 m de longitud y anudada en sus extremos. ¿Cuánta superficie se puede cercar como máximo? ¿Y como mínimo?

3. DESCRIPCIÓN ALGEBRAICA DE LAS MAGNITUDES Y SU MEDIDA

En matemáticas trabajamos con objetos no perceptibles, como conceptos, proposiciones, algoritmos, teoremas, aunque los representamos mediante palabras y símbolos.

Diversas corrientes filosóficas analizan la naturaleza de los objetos matemáticos, que conciben bien como entes ideales, abstracciones, entidades mentales, entidades lingüísticas, etc. Nosotros no entramos en esta problemática. Sólo señalamos que los conceptos abstractos, no son arbitrarios, sino que provienen de nuestras formas de actuar en el mundo perceptible que nos rodea. Por ello las matemáticas son útiles, nos resuelven problemas de la vida diaria y son imprescindibles.

A continuación estudiaremos cómo se matematiza la medida de las magnitudes extensivas (como longitud, peso, área o volumen), que hasta ahora la hemos descrito en forma empírica.

Los conceptos de magnitud y cantidad se definen matemáticamente de la siguiente forma:

> *"Una magnitud es un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades"*

A continuación recorremos a grandes rasgos los pasos que han conducido a esa concisa formalización, para hacer comprensible la definición anterior.

Relación de equivalencia

Una noción esencial dentro de la matemática es el de *relación de equivalencia* y la de c*lase de equivalencia* asociada a una relación.

- Cuando en un conjunto de objetos fijamos nuestra atención en una característica o cualidad determinada, puede ocurrir que algunos objetos posean esa cualidad y que otros no la posean.

- Cuando dos objetos la poseen decimos que están *relacionados* o que son iguales para dicho aspecto parcial.
- El conjunto de objetos relacionados forman una *clase de equivalencia*.

Conceptos

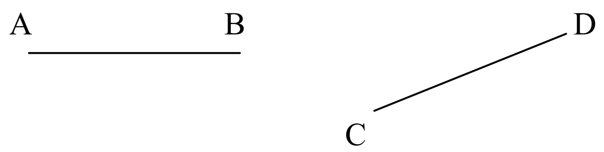
Para poder distinguir las diversas clases de equivalencia, nuestra mente crea un *concepto*, o sea, un nuevo ente abstracto para representar a todos los objetos homogéneos (que tienen algo en común). Cada concepto se designa por un nombre especial, y decimos que dos objetos tienen en común el carácter o cualidad X, cuando son equivalentes en la relación que ha dado origen a dicho concepto X.

La importancia de estas nociones para la teoria de las magnitudes radica en que el concepto de *cantidad* se corresponde con el de una clase de equivalencia definida por una cierta relación en un conjunto de objetos apropiado. A continuación analizamos la definición algebraica dada de magnitud, cantidad, y también el de medida, mediante el ejemplo de la magnitud longitud.

3.1. Construcción de la magnitud longitud

Partimos del mundo de los objetos y fenómenos perceptibles (por ejemplo, una colección de tiras de cartón) o también de objetos matemáticos, como los segmentos fijos del plano.

Sea O el conjunto de dichas bandas y de todos los objetos de los que podemos percibir la cualidad llamada longitud (largo, ancho, profundidad, distancia, etc.). A este conjunto también pertenecerán los segmentos fijos AB, CD, etc.:



Al construir este conjunto O = {AB, CD,....}, reconocemos una cualidad particular que permite discriminar si un objeto pertenece o no a O. Se pone en juego un proceso de abstracción empírica, ya que en ella intervienen objetos y acciones perceptibles.

Longitud

En el conjunto de objetos O, unas bandas (o segmentos) son superponibles entre sí y sus extremos coinciden. De manera más precisa decimos que: *"Dos segmentos están relacionados si son congruentes, esto es, si es posible superponerlos mediante un movimiento de tal modo que coincidan sus extremos"*.

Físicamente podemos realizar la comparación y comprobar la igualdad o desigualdad y decimos que establecemos una *relación de equivalencia* en el conjunto O (se cumplen las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva). Como consecuencia obtenemos clases de objetos que son iguales entre sí respecto de la cualidad *longitud*.

Cantidad de longitud

Matemáticamente denotamos la relación de equivalencia en O por una letra -I, por ejemplo-, obteniéndose de ese modo un nuevo conjunto formado por las distintas clases formadas.

- Se habla de *conjunto cociente* O/I = L y cada elemento de este conjunto se dice que es una cantidad de longitud (abreviadamente, la misma longitud).

- Representaremos las distintas clases por los símbolos [a], [b], ... Como se ha indicado, cada clase queda caracterizada porque sus elementos tienen todos algo en común, la misma “*cantidad de longitud”.* Suelen llamarse también “segmentos generales”.

Para definir este nuevo concepto hemos usado el proceso que en matemáticas recibe el nombre de “definición por abstracción”. Para que un niño pueda comprender ese nuevo concepto es preciso ponerle ante una colección variada de objetos que posean la cualidad o característica que interesa abstraer, y otros que no lo posean.

En algunos textos de matemáticas, al usar las definiciones por abstracción, se identifica el concepto con la clase de equivalencia correspondiente. Asi se dice que una cantidad de longitud es la clase [a], [b], [c],.. Sin duda existe una correspondiencia biyectiva entre clase y propiedad característica, pero en realidad son “objetos” netamente diferenciados. Proceder a esta identificación de una manera implicita, nos parece un error didáctico grave, aunque para un matemático, acostumbrado a la abstracción esta identificación, “clase de equivalencia” — “propiedad característica” — “concepto abstracto”, sea de gran utilidad.

Medida y unidad de medida

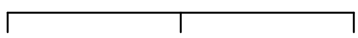
En el trabajo con magnitudes es necesario comparar distintas cantidades. La comparación se ve facilitada si se toma una cierta cantidad [u] como referente o término de comparación y se determina cuantas veces contiene una cantidad dada [a] a [u]. Este número de veces, si existe, es lo que se llama *“medida”* de la cantidad [a] con la *unidad* [u]. Medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos tratar como si se tratara con las cantidades originales.

Para ello será necesario definir una operación de sumar cantidades, y que esta suma tenga propiedades deseables de asociatividad y commutatividad, para que se pueda hablar de magnitud.

Suma de segmentos

Los segmentos AB y BC son *consecutivos*. Se caracterizan porque su intersección es vacía.

A B C $AB \cap BC = Ø$



Diremos que el segmento $AC= AB \cup BC$ es la suma de ambos y se expresa:

$$AC = AB + BC$$

Suma de longitudes

En el conjunto de los segmentos generales, que representaremos por L, podemos definir una operación o ley de composición interna: “suma de segmentos generales”.

Para ello extendemos la suma de segmentos consecutivos al caso de segmentos generales y al de cantidades de longitud.

Dados dos segmentos generales [a] y [b] (caracterizados cada uno de ellos por una longitud), siempre es posible encontrar dos representantes consecutivos y que, por tanto, se pueden sumar. Este nuevo segmento suma pertenece a una nueva clase de equivalencia, que por definición se considerará el segmento general (cantidad de longitud) suma de [a] y [b]. O sea,

$$[c] = [a] + [b]$$

Como L es el conjunto de las cantidades de longitud (o conjunto de longitudes) se acaba de definir la *suma de longitudes*.

Propiedades de la suma de longitudes

Asociativa: $[a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c]$

Conmutativa: $[a] + [b]=[b] + [a]$

Elemento neutro: Considerando como "segmento" un punto de la recta (intersección de dos segmentos fijos consecutivos) es claro que la unión: $AA \cup AB = AB$**.** En consecuencia, el segrmento general cuyo representante es AA se comporta como el elemento neutro de 1a suma de longitudes.

Estas propiedades permiten afirmar que (L, **+)** es un semigrupo conmutativo con elemento neutro.

Ordenación de longitudes

Las distintas cantidades de longitud se pueden comparar entre sí. Cuando dos segmentos fijos se superponen y sus extremos no coinciden decimos que uno es mayor o menor que el otro. En este caso, siempre es posible encontrar un segmento fijo DF, que sumado al CD permite completar lo que le falta hasta "cubrir" al AB.

C D F — Por tanto, $CD \leq AB$, pues existe DF tal que $CD + DF = AB$ (1)

A B

Esta definición de ordenación se generaliza al caso de los segmentos generales o longitudes. Decimos que $[a] \leq [b]$ si existen dos representantes $AB \in [a]$, $DC \in [b]$, tal que la relación (1) se cumple, y por tanto, podemos expresar que:

$$[a] + [d] = [b]$$

Esta relación binaria cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, y por tanto, se trata de una relación de orden. La ordenación es total, esto es, dos longitudes cualesquiera son comparables, y compatible con la suma:

$$[a] \leq [b] \quad \text{y} \quad [c] \leq [d] \quad \text{implica que} \quad [a] + [c] \leq [b] + [d]$$

Como consecuencia, la terna (L, +, ≤) es un semigrupo conmutativo, totalmente ordenado.

Multiplicación de cantidades de longitud por números naturales

La operación de sumar una cantidad de longitud consigo misma se puede realizar repetidamente, obteniéndose otra cantidad. La propiedad asociativa permite atribuir un significado preciso a la expresión:

(2) $$[a] + [a] + ..^{(n} ... [a]$$

sumando primero dos sumandos, después sumando a este resultado el tercero, y así sucesivamente. La expresión (2) se puede representar abreviadamente por n[a]. De este modo se acaba de definir un producto de cantidades de longitud por números naturales, lo que con lenguaje algebraico se expresa diciendo que hemos establecido una 1ey de composición externa:

$$N \times L \xrightarrow{f} L$$

$$n.[a] \longrightarrow [a] + [a] + ..^{(n} ... [a]$$

Propiedades del producto de longitudes por números naturales

1) n.([a] + [b]) = n.[a]+ n.[b]
2) (n+m)[a] = n.[a] + m.[a]
3) 1.[a] = [a]
4) n.(m[a]) = (n.m)[a]

Como consecuencia de estas propiedades, y de que (L, +) es un semigrupo, la terna (L, +, .) es un semimódulo sobre el semianillo N de los números naturales.

5) (Propiedad arquimediana) : Dados [a], [b], con [a] distinta de la cantidad nula, existe un número n $\in$ N tal que n.[a] > [b].

Ejercicios

23. Identificación de situaciones y referentes de medida:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de longitud.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de longitudes.
- Hacer una lista de unidades de longitud y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de longitudes y decir cuál es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de longitud.

24 Estimar medidas extremas o especiales de longitud (grosor de un folio, distancias entre planetas, etc.).

3.2. Definición general de magnitud. Tipos de magnitudes

Las propiedades estudiadas para el conjunto de las cantidades de longitud, con las operaciones de suma de 1ongitudes, producto por números naturales y la ordenación de longitudes se cumplen en otros casos, lo que permite abstraer la noción de magnitud.

Para que en un conjunto de objetos homogéneos hablemos de magnitud es preciso que sea posible definir una suma, dotada de unas propiedades particulares, resultando magnitudes distintas según las propiedades algebraicas que se cumplan.

- Así, en el conjunto de vectores libres del plano la ordenación inducida por la suma no es total, y hablamos de magnitud vectorial.
- La propiedad arquimediana no se cumple en algunos semigrupos que se consideran magnitud: “cantidad de personas”, “cantidad de días”, etc.
- En otros casos, existe para cada cantidad su opuesta o simétrica para la suma. Tal es el caso de los segmentos orientados (vectores libres de la recta).

En consecuencia, la definición más general posible de magnitud (cuantitativa y extensiva) es la siguiente;

Magnitud es un semigrupo conmutativo con elemento neutro y ordenado (M,+, ≤)
(La ordenación puede ser total o parcial)

Magnitud relativa y absoluta:

Si (M, +) es grupo se dice que la magnitud es relativa. Si sólo es semigrupo se dice que es absoluta.

Magnitud absoluta escalar:

Si en la magnitud (M, +, ≤) el orden es total y arquimediano se dice que es una magnitud absoluta escalar.

Semigrupo de elementos positivos de una magnitud relativa

Sea (G, +) un grupo conmutativo y G_+ un subconjunto de G tal que

a) (G_+, +) es un semigrupo.
b) Para todo $g\in G$ se verifica que $g\in G_+$, o bien $-g\in G_+$

En este caso, la relación ≤ dada por, $g\leq g' \Leftrightarrow g'-g\in G_+$ es de orden total y compatible con la suma, y en consecuencia (G,+,≤) es una magnitud relativa.

Al conjunto G_+ se le llama s*emigrupo de elementos positivos*, respecto de esa ordenación.

Magnitud relativa escalar:

Diremos que la magnitud relativa (M, +, ≤) es una magnitud escalar si el semigrupo (M_+, +) de los elementos positivos, respecto de la ordenación total ≤ es arquimediano.

Magnitud vectorial:

Las magnitudes que no son escalares se llaman *vectoriales*. Se puede demostrar que todo semigrupo (respectivamente, grupo) totalmente ordenador y arquimediano es isomorfo a un subsemigrupo (respectivamente, grupo) del semigrupo (R_+, +) de los números reales positivos (respectivamente, (R, +)).

Como consecuencia, teniendo en cuenta la biyección existente entre puntos de la recta y R se puede afirmar que las magnitudes escalares son aquellas que se pueden representar mediante "escalas", es decir, mediante un subconjunto de puntos de una recta.

Producto de cantidades por números enteros y racionales. Magnitudes divisibles

Dada $m\in M$ y el entero negativo $-p\in Z$, definimos
(-p)m = -(pm), si existe esa cantidad.

De modo similar se define el producto por racionales. Si

$(z/p)\in Q$ (p>0), $(z/p)m = m' \Leftrightarrow zm = pm'$ (si existe)

Las magnitudes para las que, para todo $m\in M$, existe el producto por números racionales se dice que son magnitudes divisibles. Como ejemplos pueden citarse la longitud, tiempo, masa, etc. No es divisible la magnitud "número de personas", "número de días", etc.

<u>Proposicion:</u> El conjunto $S(M) = \{(z/p)\in Q \,/\, \forall\, m\in M, (z/p)m\in M\}$ es un subsemianillo unitario

del semianillo de los números racionales. Este conjunto recibe el nombre de *semianillo de medición* de la magnitud M.

Magnitudes discretas y continuas

La magnitud M se dice que es "discreta" si existe un intervalo abierto $(r,t) = \{q \in Q / r<q<t\} \subset Q$ disjunto con el semianillo de medición S(M). En este caso, cualquier cantidad se puede expresar como múltiplo de una determinada que se llama unidad de medida. Las magnitudes que no son discretas se llaman continuas.

Proposición: La magnitud (M,+) es un semimódulo sobre su semianillo de medición S(M).

Las magnitudes escalares pueden caracterizarse también a partir de la noción de *base* de una magnitud.

Se llama base de una magnitud a un subconjunto $B = \{g_1, g_2, ..., g_n\} \subset M$, tal que para todo $m \in M$, existe una colección de números $\{s_1, s_2, ..., s_n\} \in S(M)$, unívocamente determinada, tales que,

$$M = s_1 g_1 + s_2 g_2 + ... + s_n g_n$$

Una magnitud es escalar si posee una base unitaria. Esta base recibe el nombre de unidad de medida.

3.3. Pasos para construir una magnitud

Según se ha podido observar, en el proceso de definición de la magnitud longitud se han recorrido unos pasos o etapas que son características en la construcción de cualquier magnitud. En síntesis son las siguientes:

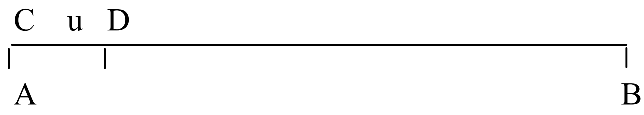
1. Identificar el conjunto de objetos sobre los que se abstrae el concepto de cantidad .
2. Definir la relación de equivalencia por medio de la cualidad común que nos interesa.
3. Estos dos primeros pasos implican "homogeneizar" el conjunto de objetos, agrupándolos en clases de equivalencia, obteniendo como consecuencia el conjunto de las cantidades que será el conjunto cociente correspondiente.
4. Definir la suma de cantidades y estudiar sus propiedades.
5. Relación de ordenación y propiedades.
6. Definir la operación externa, producto por números.
7. Clasificación de la magnitud: absoluta, relativa, escalar, vectorial, discreta, continua.

Ejercicio

24. Hacer una descripción resumida de la construcción de las siguientes magnitudes:
a) Peso
b) Amplitud angular
c) Área de polígonos
d) Volumen de poliedros
e) Número de días
f) Dinero

3.4. Medida de magnitudes

La noción de medida surge de situaciones como las siguientes: necesitamos saber cuántas veces es más grande el segmento AB que el segmento u de extremos C y D.

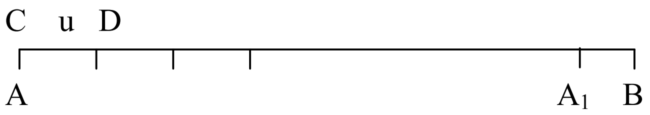


Para ello llevamos el segmento u, sucesivamente, a partir del extremo A, hasta alcanzar o sobrepasar el otro extremo B. Pueden ocurrir los casos siguientes:

1. *Medida entera:* Si se obtiene que AB = nu, siendo n un número natural, se dice que la medida del segmento AB con la unidad u es igual a n.

En caso contrario, se verificará que nu < AB < (n+1)u.

2. *Medida racional:* Si el segmento AA_1 es talque AA_1= un,



tendremos, por tanto, que AA_1 <AB <(n+1)u. Por tanto, A_1B < u.

Se sabe que el teorema de Thales permite dividir un segmento en partes iguales. Si dividimos u en d partes iguales, esto es, u = du_1, y medimos A_1B con la nueva unidad u_1, se obtendrá:

$n_1u_1 \leq A_1B \leq (n_1+1)u_1$, siendo $0\leq n_1\leq d$

Si $n_1u_1 = A_1B$, esto es, la medida de A_1B con u_1 como unidad es n_1, y por tanto,

$AB = (n + n_1/d)\ u$

y se dice que el *número racional* $(n+n_1/d)$ es la medida de AB con la unidad u.

3. *No existe medida racional*

En caso contrario, se toma otra unidad más pequeña, que, generalmente, se obtiene volviendo a dividir u_1 en d partes iguales. Como consecuencia se ve que al medir AB con una unidad u se obtiene una sucesión de números racionales:

(1) $n, \quad n+n_1/d, \quad n+n_1/d + n_2/d^2, ..., \quad n+n_1/d + n_2/d^2 + ... + n_r/d^r + ...$

finita o infinita. En el primer caso, esto es, cuando se termina en el último término escrito en (1), se verifica que:

$AB = (n + n_1/d + ... + n_r/d^r)u$

y se dice que la medida del segmento AB con la unidad u es el número racional,

$(n + n_1/d + ... + n_r/d^r)$

lo que se expresa abreviadamente así:

$\mu_u(AB) = (n + n_1/d + ... + n_r/d^r)$

Cuando existe la medida racional se dice que la cantidad correspondiente es *conmensurable* con la unidad u.

Pero puede ocurrir que la sucesión (1) sea infinita, en cuyo caso el proceso de medida utilizado no nos da un número, sino una sucesión de números racionales. Si la sucesión (1) posee límite se puede tomar este límite como medida del segmento AB con la unidad u, pero puede ocurrir que la sucesión (1) no tenga límite, como ocurre con el caso que se presenta cuando el segmento AB es la diagonal de un cuadrado de lado u. En este caso diremos que la cantidad AB es *inconmensurable* con la unidad u.

Números irracionales

Por tanto, hay casos en que no se puede medir una cantidad de una magnitud empleando para ello un número racional, y esto no sólo en el ejemplo que acabamos de ver de la longitud, sino en la mayor parte de las magnitudes físicas, químicas, etc.

La necesidad de poder asignar un número a todas las cantidades de las magnitudes conduce a ampliar el campo de los números racionales construyendo unos nuevos entes, los números irracionales, que serán las medidas de las cantidades inconmensurables con la unidad u.

Definición de medida

Estas ideas intuitivas se pueden formalizar por medio de las siguientes definiciones y proposiciones:

Definición: Se llama *medida* de la cantidad m de una magnitud escalar, respecto de la unidad u, al número $q \in S(M)$, tal que m = qu.

Proposición: La aplicación μ_u : M ------ S(M) que asocia a cada cantidad de una magnitud escalar su medida respecto de u, es un isomorfismo de (M,+) en [S(M), +]

Proposición (Cambio de unidad de medida): Si u y u' son dos unidades de medida de una magnitud escalar, tales que $\mu_{u'}(u) = k$, entonces

$$\mu_{u'}(m) = k\, \mu_u(m)$$

El isomorfismo entre magnitud escalar y números permite asignar a cada cantidad un número y recíprocamente, con lo que su manejo puede reducirse al de los números. Además, de este modo podemos extender el campo de operaciones posibles con cantidades (multiplicación y cociente de cantidades), incluso de cantidades distintas.

Medida de magnitudes discretas

Las magnitudes discretas son aquellas en que cada cantidad se puede expresar como múltiplo de una tomada como unidad de referencia. O sea, para toda $m \in M$ y dada $u \in M$, existe $n \in N$ tal que m = un. Como consecuencia, se puede establecer una medida de un modo inmediato:

$$\mu_u (m) = \mu_u (un) = n.$$

Si la magnitud discreta es relativa, su estructura algebraica es de grupo, y por tanto, su semianillo de medición será Z.

Observación: Para determinar una cantidad de una magnitud no es suficiente dar su medida, es necesario expresar la unidad a la cual se refiere. Por ejemplo, c = 17 Hl, a = -30º, p = (1/4) kg, son cantidades de capacidad, amplitud de ángulos orientados y peso, respectivamente.

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. La equivalencia entre la longitud de un palillo y una cerilla es 2 palillos es igual a 3 cerillas (2p = 3c). Después de efectuar mediciones de dos longitudes l y l', realizadas, respectivamente, con cerillas y palillos se ha obtenido que:

$$3p < l < 4p$$
$$4c < l' < 5c$$

¿Qué se puede decir de l y l'? ¿Cuál es mayor?

2. Una misma longitud h ha sido medida con palillos y, a continuación con capuchones de bolígrafos Bic, obteniéndose que:

$$5p < h < 6p$$
$$11c < h < 12c$$

¿Qué se puede decir de las medidas efectuadas?

3. Suponga que {l, s, t, u, v} es un sistema de medida de longitudes regular, en el que los cambios se hacen de cuatro en cuatro.

a) Traduzca a escritura compleja correcta la siguiente medida:

2l 4s 6t 5u 8v

b) Reduzca esa escritura a unidades s.
c) Reduzca esa escritura a unidades l.
d) Reduzca esa escritura a unidades v.
e) Reduzca esa escritura a unidades u.

4. Suponga que tomamos como unidad de medida la cuarta parte del ancho de un folio, y que formamos un sistema regular con cambios de dos en dos. Construya una cinta métrica con dicho sistema cuya longitud máxima sea el largo de cuatro folios. Ponga sobre la cinta las graduaciones intermedias.

Reflexione sobre las dificultades que va encontrando en la graduación de la cinta, y piense que el sistema métrico decimal es tan desconocido para el niño como éste lo es para usted.

5. Piense qué procedimientos utilizaría para estimar:

a) La longitud de un tramo de calle.
b) La longitud de la fachada del Monasterio de la Cartuja.
c) La altura de una estantería.
d) La distancia de su casa al bar más próximo.
e) El ancho de un cuadro.

6. Identificación de situaciones de medida y referentes de la magnitud peso:

- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de peso.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de pesos.
- Hacer una lista de unidades de peso y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de peso y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de peso.
- Estimar medidas extremas o especiales de peso (peso de un grano de arroz, peso de un filete

de ternera, etc.).

7. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre el tiempo:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de tiempo.
- Citar las unidades no estándar más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida del tiempo.
- Hacer una lista de unidades de tiempo y tiempos a medir y relacionar cada uno con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de tiempo y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida del tiempo.

8. Estimar medidas extremas o especiales de tiempo (en un partido de baloncesto, las edades de la Tierra, etc.).

9. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre temperatura:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar temperaturas.
- Citar tres situaciones de medida de temperaturas y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varias unidades de medida de temperaturas utilizadas en distintos países y contextos y hacer la conversión de unas a otras de medidas significativas (fusión del agua, temperatura ambiente, etc.).

10. Estimar medidas extremas o especiales de temperatura (la temperatura ambiente ideal para el ser humano, el cero absoluto, etc.).

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è[re] année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas.* Barcelona: MEC-Labor.

Frias, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]

Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.

Roanes, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Anaya.

IV.

Medida de Magnitudes para Maestros

Capítulo 2:

MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE MAGNITUDES EN PRIMARIA (ÁREAS Y VOLÚMENES)

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

a) Resuelve los problemas propuestos.
b) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
c) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
d) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
e) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
f) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Resuelve:

a) Sonia ha pegado una foto cuadrada de 9 cm de lado en una hoja cuadriculada. Cada cuadrado de la cuadrícula es de 1 cm^2. ¿Cuántos cuadraditos ocupa la foto?	b) Luis tiene una pegatina cuadrada de 6 cm de lado y otra rectangular de 7 cm de largo y 5 cm de ancho. ¿Qué pegatina tiene el área mayor?
c) Óscar cubre una mesa con azulejos de 1 cm2. La mesa mide 70 cm de largo y 50 cm de ancho. ¿Cuántos azulejos pone?	d) Una cartulina mide 20 cm de largo y 12 cm de ancho. Paula la ha cortado por la mitad. ¿Cuál es el área de cada trozo?

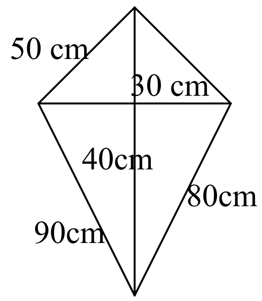
2. Dibuja:
- Un rectángulo cuya área sea 36 cm^2. - Un cuadrado cuya área sea 25 cm^2.
- Un rectángulo cuya área sea 28 cm^2. - Un cuadrado cuya área sea 49 cm^2.

¿Puedes dibujar otro rectángulo distinto al anterior cuya área sea 36 cm^2?

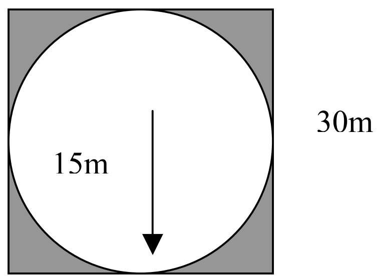
3. Los lados de un rectángulo miden 2/5 m y 3/4 m. ¿Cuál es su área?

4. Dibuja un cuadrado de 3 cm de lado y un rectángulo de 5 cm de largo y 4 cm de ancho. Calcula el perímetro y el área de cada polígono

5. Calcula el perímetro y área de un pentágono regular que tiene 5'7 m de base y 4 m de apotema.
6. Juan y Carlos están cosiendo una cinta en el borde la cometa. ¿Cuánto mide la cinta que han cosido alrededor de la cometa? ¿Cuál es el área de la tela?

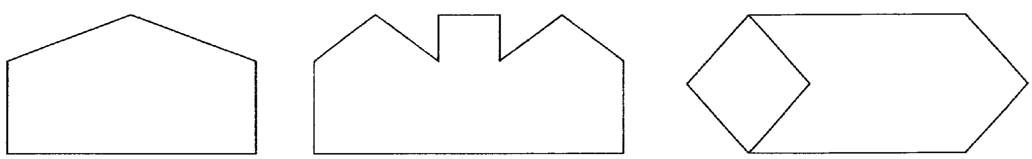


7. Canelo es un borrico glotón. Su dueño lo ha atado con una cuerda de 15 m de larga en el centro de un prado de forma cuadrada de 30 m de lado. Calcula superficie de la parte del prado en la que no puede comer Canelo porque se lo impide la cuerda. Vuelve a hacer este problema suponiendo ahora que Canelo, el borrico, está atado en una esquina del prado.

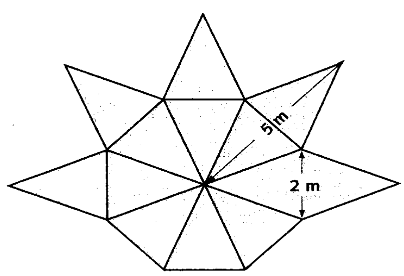


8. La rueda de una bicicleta tiene un diámetro de 50 cm. ¿Cuántas vueltas dará al recorrer una distancia de un kilómetro?

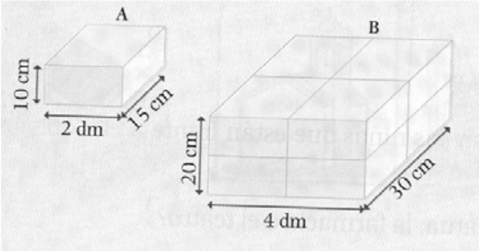
9. Primero, descompón cada figura en polígonos de área conocida. Después, toma las medidas necesarias y calcula el área de cada una.



10. Calcula el área, en m^2 de la siguiente figura



11. En este problema hay dos errores. Búscalo y vuelve a hacerlo correctamente: Calcula, en centímetros cúbicos, el volumen de estos primas

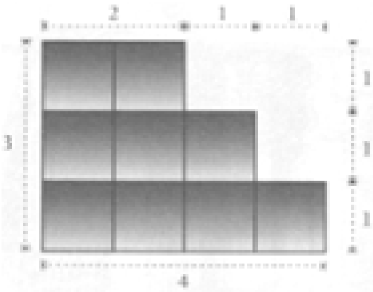


- Volumen de A: V_A = 10 cm x 2 dm x 15 cm = 300 cm^3.

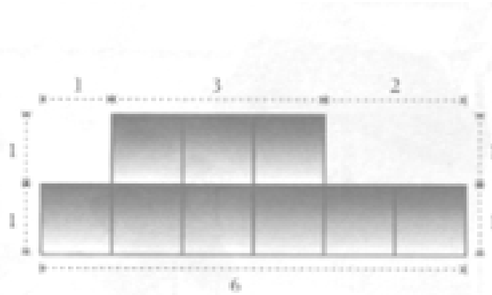
- Volumen de B: En el prisma B todo es el doble que en el prisma A. Por lo tanto, el volumen será:

V_B = 2 x 300 cm3 = 600 cm^3

12. Juntando de diferentes formas nueve cuadrados de un centímetro de lado, hemos construido dos polígonos cuyos perímetros miden 14 cm y 16 cm, respectivamente.



P=4+3+2+1+1+1+1+1= 14 cm



P= 6+1+1+1+3+2+1+1=16 cm

- Busca la manera de unir nueve cuadrados para formar el polígono que tenga el menor perímetro posible.
- Busca también el polígono con el mayor perímetro posible.

B: Conocimientos Matemáticos

1. MAGNITUDES GEOMÉTRICAS: MEDIDA DIRECTA E INDIRECTA

El proceso de medir cualquier magnitud ha sido estudiado en el capítulo 1 de Magnitudes y medida y, en resumen, consiste en seleccionar una unidad apropiada de medida, fijar un procedimiento para cubrir o llenar la cantidad que se desea medir mediante una colección de unidades y expresar la medida mediante el número de unidades usadas.

En muchas situaciones prácticas no es posible, o resulta nada apropiado, hacer una medida directa de las cantidades de una magnitud, en particular si se trata de magnitudes geométricas. Por ejemplo, si trata de medir el perímetro de un cuadrado, basta medir un lado y multiplicar por 4, ya que se sabe que los cuatro lados miden lo mismo.

En este tema tratamos la medida directa e indirecta de las magnitudes geométricas amplitud angular, área y volumen. Abordamos, por tanto, la obtención de las fórmulas o funciones algebraicas que permiten calcular la medida de las cantidades correspondientes a las magnitudes geométricas citadas, a partir de datos conocidos. Para la medida indirecta de longitudes juega un papel importante el teorema de Pitágoras por lo que incluimos su estudio en la sección de conocimientos matemáticos.

2. MEDIDAS LINEALES

2.1. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es probablemente uno de los más famosos e importantes resultados de la geometría elemental. Sus consecuencias y generalizaciones son fundamentales en trigonometría y en otras partes de las matemáticas. Es también una herramienta útil para la medida indirecta de longitudes.

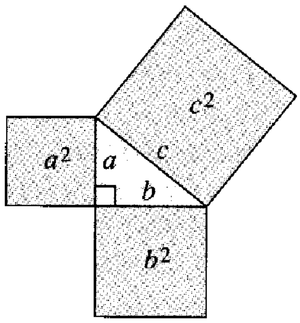
Enunciado: Dado un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Simbólicamente,

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

con *a*, *b* longitudes de los catetos y *c* longitud de la hipotenusa.

Construyendo cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo el teorema de Pitágoras se puede expresar como una relación entre las áreas de dichos cuadrados: La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



Demostración intuitiva

Veamos una demostración intuitiva del teorema de Pitágoras.

- En la figura 1 parte (a) designamos por *a* y *b* los catetos y *c* la hipotenusa.

- A continuación consideramos el cuadrado con lados de longitudes $a+b$.
- En la parte (b) se muestran cuatro copias del triángulo en el interior del cuadrado que dejan sin recubrir dos cuadrados más pequeños de áreas respectivas a^2 y b^2.
- En la parte (c) de la figura se han dispuesto los cuatro triángulos de tal manera que dejan sin cubrir un cuadrado de área c^2.
- Puesto que se trata de dos particiones del mismo cuadrado de lado $a+b$ se deduce que las áreas no cubiertas por los cuatro triángulos en cada uno de los dos casos deben ser iguales, o sea, que $a^2+b^2 = c^2$.

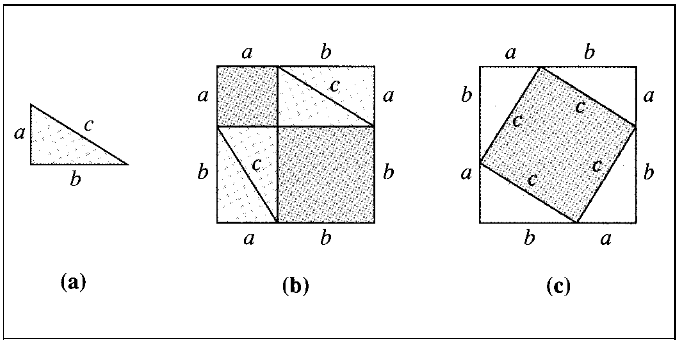
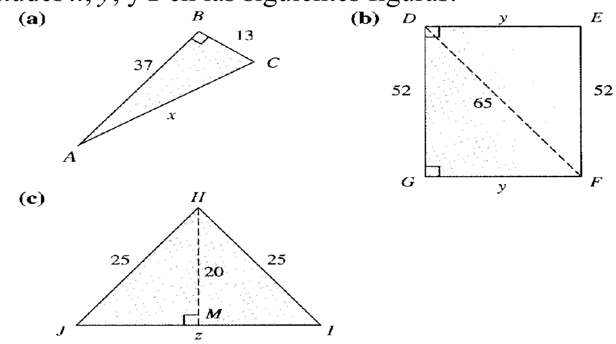


Fig. 1

Ejercicios:

1. Encontrar las longitudes x, y, y z en las siguientes figuras:



2. Determinar si las ternas de números siguientes pueden ser las medidas de los lados de triángulos rectángulos:

a) 15; 17; 8 b) 10; 5; $5\sqrt{3}$ c) 231; 520; 568

3. MEDIDA DE ÁREAS Y PERÍMETROS

Como sabemos, el número de unidades requeridas para cubrir una región plana es el área de dicha región. Usualmente se eligen cuadrados como unidad de área, pero cualquier forma que recubra la figura sin solapamientos ni agujeros puede utilizarse como unidad de medida. En el proceso de medir se utilizan dos propiedades básicas:

Propiedad de congruencia: Si una región R es congruente con otra región S entonces ambas regiones tienen la misma área: área(R) = área(S).

Propiedad de disección: Si una región R se descompone en varias subregiones disjuntas, A, B, ..., F, entonces el área de R es la suma de las áreas de las subregiones:

Área (R) = área (A) + área (B) + ... + área (F).

A continuación estudiamos las áreas de algunos polígonos.

3.1. Áreas de polígonos

Rectángulos

En la figura 2 tenemos un rectángulo de 5 cm de base y 3 cm de altura. Vemos que podemos recubrirlo mediante 3 filas de 5 baldosas de $1cm^2$. El número total de baldosas usadas es de 15, o sea, 3x5, producto de la longitud de la base por altura. Esta manera de calcular el área de un rectángulo se expresa con la fórmula:

A = b.a (área igual al producto de la base por la altura)

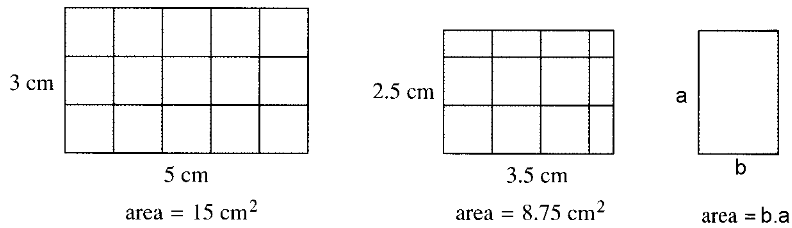


Fig. 2

Paralelogramos

Cualquier paralelogramo con base b y altura a se puede diseccionar y disponer en la forma de un rectángulo de base b y altura a de igual forma como se indica en la figura 3. La fórmula que permite calcular el área de cualquier paralelogramo es la misma que la del rectángulo:

A = b.a

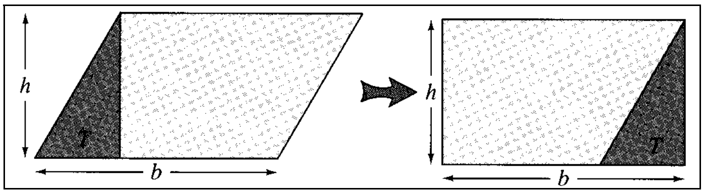
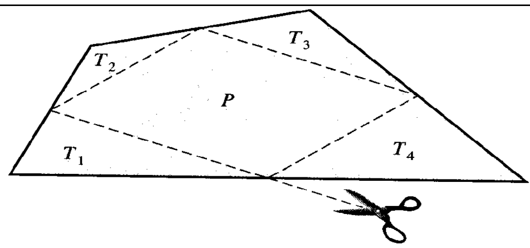


Fig. 3

Ejercicios:

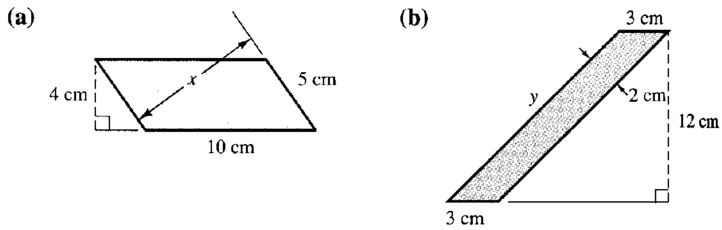
3. Recorta un cuadrilátero convexo en cartulina, localiza los puntos medios de los lados y únelos como indica la figura, formando los cuatro triángulos T_1, T_2, T_3, y T_4, y el paralelogramo P.



a) Probar que los cuatro triángulos recubren el paralelogramo.

b) ¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y el área del cuadrilátero original?

4. Encontrar el área de cada uno de los paralelogramos siguientes y calcular las longitudes *x* e *y*.



Triángulos

Como se indica en la figura 4 cualquier triángulo de base *b* y altura *a* se puede diseccionar y disponer de manera que se forme un paralelogramo de base *b* y altura $1/2a$. Por tanto, el área de un triángulo se puede calcular con la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} b.a$$

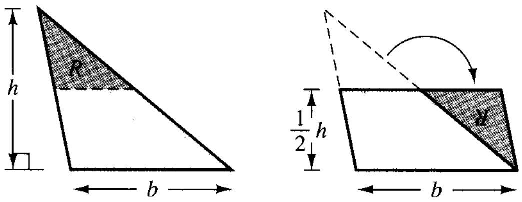
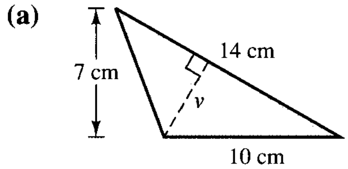


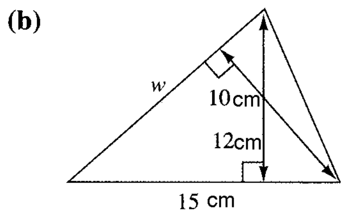
Fig. 4

Es importante tener en cuenta que cualquier lado de un triángulo se puede considerar como base, de modo que habrá tres pares de bases y de alturas.

Ejercicios:

5. Encontrar el área de cada triángulo y las distancias v y w.





6. Demostrar que el área de un trapezoide cuyas bases son b_1 y b_2, y su altura es a se puede calcular con la siguiente fórmula: $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).a$

3.2. Longitud de una curva

La longitud de una línea poligonal se obtiene sumando las longitudes de sus lados. Si la línea es una curva (no poligonal) su longitud se puede estimar calculando la longitud de una línea poligonal cuyos vértices estén sobre la curva. La aproximación se puede ir mejorando aumentando el número de vértice (Fig. 5).

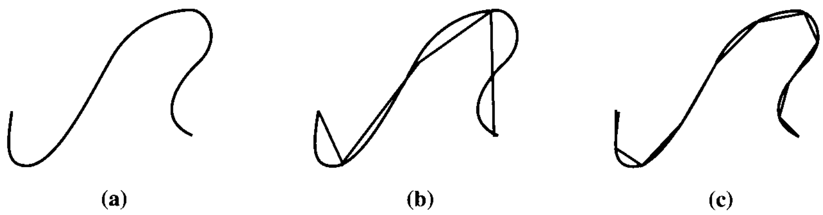


Fig. 5

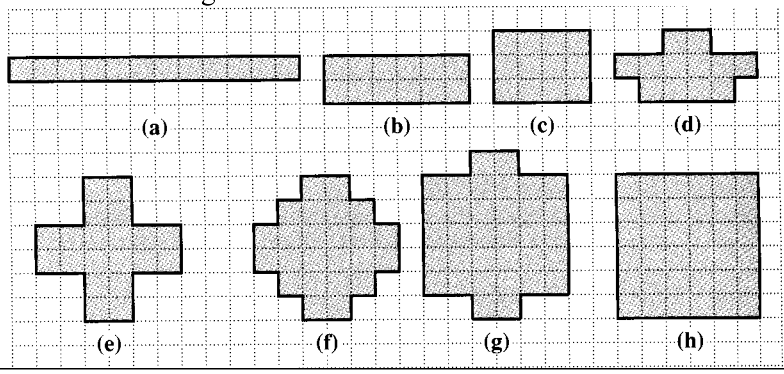
Si se trata de un objeto físico con bordes curvilineos cuya longitud se desea medir podemos ajustar un hilo y después extenderlo longitudinalmente para su medición con una regla.

Perímetro

La longitud de una curva cerrada plana se dice que es el *perímetro* de dicha curva. Puesto que es una longitud se medirá en unidades de longitud (centrímetros, metros, etc.). Es importante no confundir el perímetro con el área de una región limitada por una curva cerrada simple. El área es una magnitud que expresa el tamaño de una región y se mide en cm^2, m^2, etc.

Ejercicio:

7. Las siguientes figuras se han dibujado sobre una cuadrícula cuyo lado mide 1cm. Determinar el perímetro y el área de cada figura:



Longitud de la circunferencia

Como sabemos la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo O una cierta distancia constante r. La medida directa de la longitud del borde de un objeto circular se puede obtener, de manera aproximada, rodeando el cuerpo con un hilo o cuerda de manera ajustada, extendiendo el hilo sobre una regla graduada y leyendo la longitud correspondiente del hilo extendido. ¿Es posible determinar la longitud de una circunferencia sin necesidad de hacer la operación física descrita? La respuesta es afirmativa debido a que existe una relación constante entre la longitud de cualquier ircunferencia y su diámetro: la razón o cociente entre dichas longitudes es el número irracional π (3’1415927....). Podriamos hacer comprobaciones experimentales de esta relación midiendo con una cinta o hilo el borde circular de diversos objetos y dividiendo esa longitud por los diámetros correspondientes. Si C representa la longitud de la circunferencia y d la longitud del diámetro se tiene: $C = \pi d$ (o también, $C = 2\pi r$, si r es la medida del radio).

En 1761 John Lambert probó que π es un número irracional, de manera que es imposible expresar su valor mediante una fracción o un decimal exacto o periódico. En la práctica se suele usar como aproximación 3’14, o 3’1416.

Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia necesitamos conocer qué fracción es de la circunferencia completa. Conocida la amplitud del ángulo central correspondiente a ese arco, por ejemplo *n* grados, la longitud A del arco será:

$$A = 2\ \pi\ r.\ n\ /360;$$

El área de un círculo

El área de un círculo de radio *r* viene dado por la fórmula, $A = \pi r^2$, fórmula probada por primera vez de manera rigurosa por Arquímedes. Una manera informal, aunque convincente de obtener la fórmula $A = \pi r^2$ se muestra en la figura 6. El círculo de radio *r* y circunferencia $C = 2\pi r$ se descompone en sectores congruentes y se disponen para formar un “paralelogramo” de base $\frac{1}{2}C = \pi r$ y altura *r*. El paralelogramo “ondulado” tendrá como área $\pi\, r.r = \pi r^2$. Si el número de sectores se hace cada vez mayor, los sectores serán progresivamente más delgados y el desarrollo se aproximará cuanto se quiera a un verdadero paralelogramo de área πr^2.

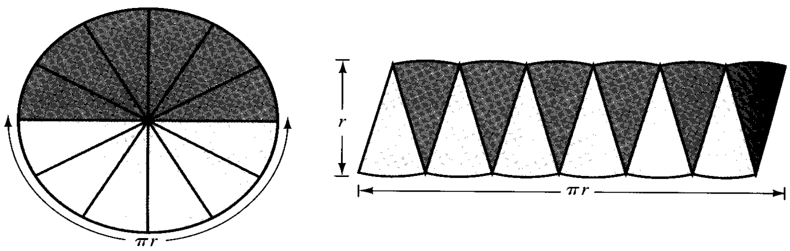


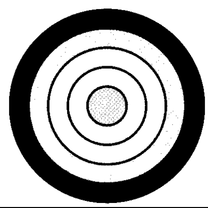
Fig. 6

Ejercicios:

8. Encuentra una fórmula que permita calcular el área de un sector circular de radio *r* y cuyo ángulo central sea de *n* grados.

9. Una pizza de 30 cm de diámetro tiene el mismo espesor que otra de 50 cm. Suponiendo que la cantidad de ingredientes de las pizzas es proporcional a sus áreas, ¿cuántos ingredientes de más tiene la pizza grande respecto de la pequeña?

10. Una diana para lanzar dardos está formada por cuatro anillos concéntricos como se muestra en la figura. Los radios de los círculos son 10, 20, 30, 40, y 50 cm. Supongamos que al lanzar un dardo existe la misma probabilidad de que caiga en cualquier punto de la diana. ¿Es más probable que el dardo caiga en el anillo exterior o dentro de la región formada por el círculo central y los dos anillos concéntricos más próximos que le rodean?



4. ÁREA DE SUPERFICIES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

El área de la superficie de un poliedro será la suma de las áreas de las caras. Con frecuencia es útil imaginar que se cortan las caras y se disponen sobre un plano. De esta manera, en muchos casos, la figura formada (desarrollo de las caras del poliedro) tiene un área que se puede calcular fácilmente. Esta técnica se puede aplicar a otras figuras distintas de los poliedros. A título de ejemplo veamos cómo calcular el área total de la caja de forma estrellada de la figura 7.

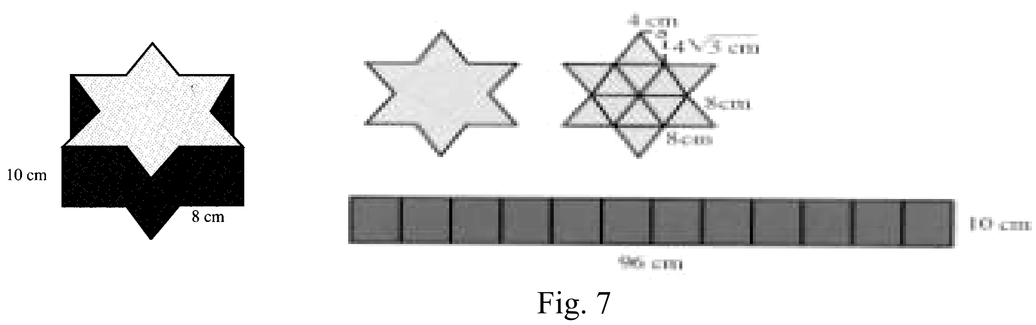


Fig. 7

El desarrollo de la superficie lateral da lugar a un rectángulo de base 96 cm y altura 10 cm, mientras que las bases de la caja son dos polígonos estrellados que se pueden descomponer en 12 triángulos equiláteros iguales. El teorema de Pitágoras permite calcular la altura de dichos triángulos, resultando $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Haciendo cálculos el área total de la caja será de 1625 cm^2.

Ejercicios:
11. Encuentra una fórmula que permita calcular el área total de una pirámide regular recta de base hexagonal de lado *l* y de altura *a*.

12. Encuentra una fórmula que permita calcular el área total de un cilindro recto de altura *a* y cuyas bases tienen de radio *r*.

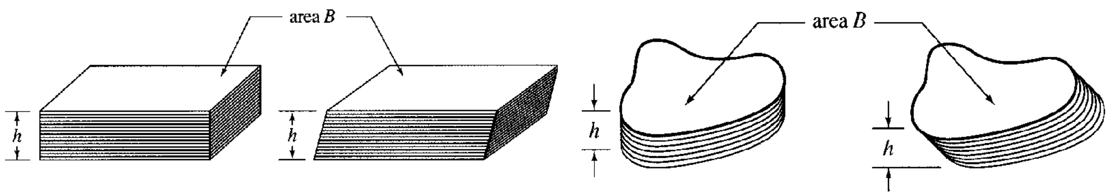
13. Encuentra una fórmula que permita calcular el área de la superficie total de un cono circular recto de radio *r* y altura *a*.

5. VOLÚMENES DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

5.1. Volúmenes del prisma y del cilindro

El volumen del prisma recto y del cilindro recto se calcula multiplicando al área de la base, B, por la longitud de la altura, *a*: V = B.a. La base B corresponderá al área de un polígono o un círculo, respectivamente.

Si el prisma o el cilindro es oblicuo la fórmula V = B.*a* sigue siendo válida. Podemos imaginar que el cuerpo está formado por láminas de la misma forma que la base apiladas formando una columna de altura *a*. Es claro que si esa columna se inclina o tuerce el volumen continúa siendo el mismo.



5.2. Volúmenes de pirámides y conos

En el plano sabemos que la diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto, el área de cada triángulo será la mitad que la del cuadrado correspondiente. En el espacio las diagonales que parten de un vértice de un cubo forman las aristas de tres pirámides congruentes que llenan al cubo. Por tanto, el volumen de cada pirámide es la tercera parte del volumen del cubo correspondiente (véase la figura 8).

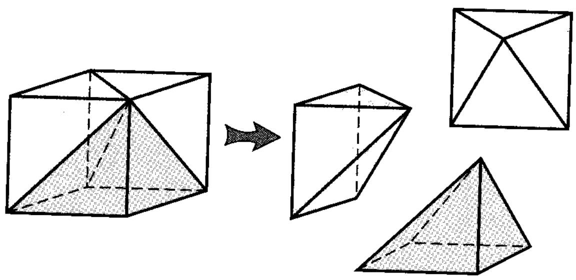


Fig. 8

Si en lugar de un cubo tomamos un sólido rectangular y usamos las diagonales trazadas desde un vértice, el sólido se descompone en tres pirámides. En general las tres pirámides no son congruentes unas con otras, pero se puede demostrar que los volúmenes de las tres pirámides son iguales. Por tanto, si el prisma tiene de base B y altura *a*, deducimos que el volumen de cada pirámide es $V = \frac{1}{3} B \cdot a$. Con igual razonamiento se prueba que el volumen de todas las pirámides de base B y altura *a* se puede calcular con dicha fórmula. La base puede ser cualquier polígono y el vértice puede estar en cualquier punto situado a la distncia *a* del plano de la base.

La base de un cono se puede aproximar con la precisión que se desee por un polígono con suficiente número de lados, por lo que el volumen de un cono cuya base es B y la altura *a* vendrá dado también por la fórmula, $V = \frac{1}{3} B \cdot a$

5.3. Volumen de la esfera

Supongamos que una esfera de radio *r* se introduce en el interior de un cilindro circular recto de altura 2*r* conteniéndola, por tanto, de manera ajustada y que llenamos todo el espacio no ocupado por la esfera con agua. Si a continuación sacamos la esfera podemos comprobar experimentalmente que el agua llena la tercera parte del cilindro. Puesto que el volumen del cilindro es B.*a* = (πr^2) (2r) = $2\pi r^3$, el experimento sugiere que el volumen de la esfera de radio r será los dos tercios restantes, esto es,

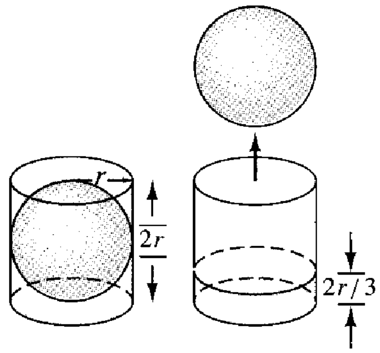


Fig. 9

$$V = \frac{2}{3}(2\pi r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La primera demostración rigurosa de esta fórmula fue dada por Arquímedes.

5.4. Área de la superficie de la esfera

La fórmula que permite calcular el área de la superficie de una esfera se puede obtener con el siguiente razonamiento intuitivo. Supongamos que la superficie de la esfera se descompone en una gran cantidad de pequeñas regiones de área B_1, B_2, B_3, ..., B_n. La suma de estas áreas $B_1 + B_2 + B_3 + ... +B_n$ será el área superficial, S, de la esfera. Cada una de estas regiones se puede considerar como la "base" de un sólido piramidal cuyo vértice está en el centro de la esfera. Cada "pirámide" tiene una altura *r*, de manera que sus volúmenes serán $(1/3)B_1r$, $(1/3)B_2r$, etc.

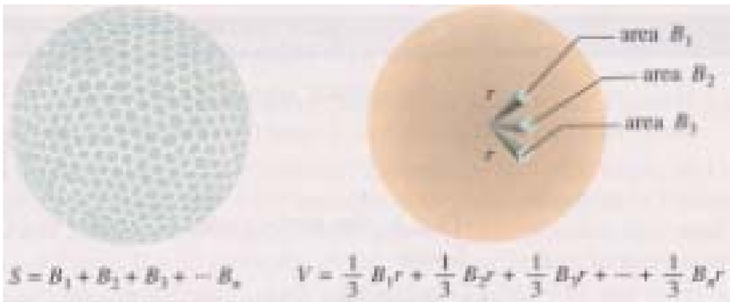


Fig. 10

En esta situación se verifican las siguientes relaciones:

$S = B_1 + B_2 + B_3 + ... +B_n$ (área de las superficie de la esfera)

$V = \frac{1}{3}B_1 r + \frac{1}{3}B_2 r + \frac{1}{3}B_3 r + ... + \frac{1}{3}B_n r$ (Volumen de la esfera)

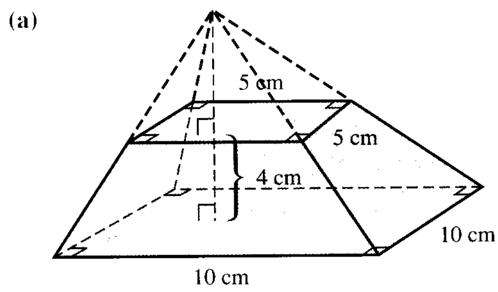
Por tanto,

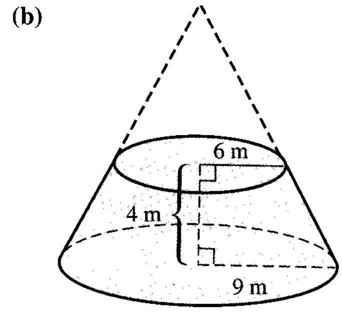
$$V = \frac{r}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) = \frac{r}{3} S$$

Puesto que $V = \frac{4}{3}r^3$, sustituyendo y despejando obtenemos la expresión buscada para el área de la esfera, S = 4πr^2.

Ejercicios:

14. Un tronco de pirámide (o de un cono) se obtiene cortando el cuerpo por un plano paralelo a la base y suprimiendo la pirámide (o el cono) que se obtiene. Encontrar los volúmenes de los troncos de pirámide y de cono siguientes:

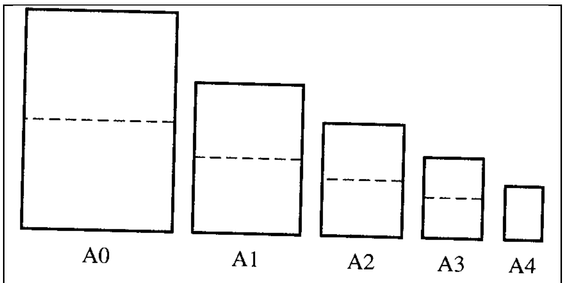




15. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el diámetro de la Tierra. a) ¿Cuántas veces es mayor el área de la superficie de Júpiter?; b) ¿Cuántas veces es mayor el volumen?

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

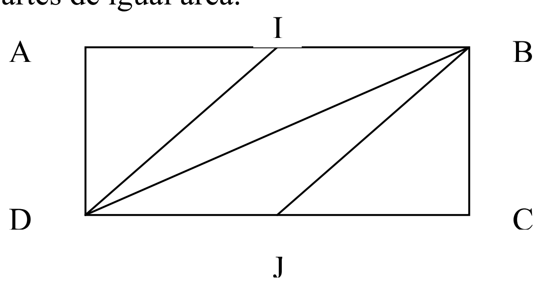
1. En muchos países el tamaño y la forma de las hojas de papel se fabrican con dimensiones basadas en el sistema métrico. Un hoja A0 es un rectángulo de 1m^2 de área. Cuando se divide en dos mitades según su ancho se forman dos hojas A1, de tal manera que cada mitad es semejante a la hoja A0. Cortando de manera similar las hojas A1 se obtienen las A2, y así sucesivamente.



a) ¿Cuál es el factor de escala por el que la dimensión lineal de una hoja A0 se multiplica para obtener las dimensiones correspondientes de una hoja A1?
b) Encontrar el ancho y largo, en centímetros, de una hoja A0.
c) Encontrar el ancho y largo de una hoja A4.

2. Se quiere dividir un rectángulo en cuatro partes de igual área.

a) Justificar que la partición indicada en la figura adjunta cumple la condición.
b) Proponer otras cuatro formas de hacer la partición.



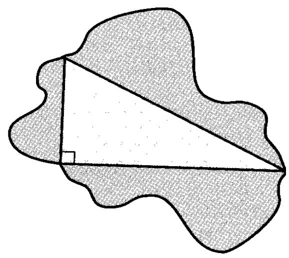
3.
a) Trazar un cuadrado de 10 cm de lado. En el interior de este cuadrado trazar los cuatro semicírculos centrados sobre las mitades de los lados y que pasan por el centro del cuadrado (que será el punto de intersección de las diagonales el cuadrado). El interior del cuadrado queda dividido en 8 superficies disjuntas. Rayar las que sean convexas.
b) Trazar los ejes de simetría de la figura obtenida y calcular el área total de la figura rayada.

4. Un trapecio ABCD es rectángulo en A y D. Elegida una unidad de longitud se supone que AB = 30 y DC = 55. ¿En qué posición se debe tomar un punto E del segmento CD para que la recta BE divida al trapecio en dos polígonos de igual área?

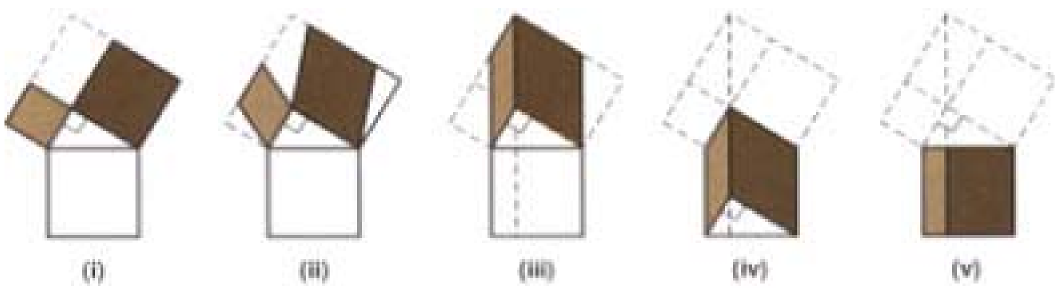
5. Enrollando una hoja de papel de formato DIN A4 (21 x 29'7 cm) se pueden obtener dos cilindros: uno de altura 21 cm y el otro de altura 29'7 cm. Comparar los volúmenes de estos cilindros

6. Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circular recto que contiene a la esfera (de manera ajustada). Demostrar que el área de la esfera es también los dos tercios del área de la superficie total del cilindro.

7. Supongamos que se construyen figuras semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura adjunta. ¿Qué fórmula relaciona las áreas de las tres figuras? Explica con detalle tu razonamiento.



8. Justificar por qué las regiones sombreadas (que son todas paralelogramos) de la secuencia de diagramas de la figura adjunta tienen todas la misma área. Esto proporciona una demostración dinámica del teorema de Pitágoras.



9. Se preguntó a un alumno que encontrara una fórmula para calcular el área de un círculo. Sugirió poner una cuerda alrededor del círculo y después formar con la cuerda un cuadrado. Por ejemplo, un círculo con una circunferencia de 8 unidades se puede transformar en un cuadrado de lado 2 unidades.

a) Si c = la longitud la circunferencia y l = lado del cuadrado, escribe una fórmula para l en función de c.
b) ¿Cuál sería la formula para calcular el área del círculo que se deduciría si fuera correcto el método propuesto por el alumno?
c) ¿Es correcta la fórmula? ¿Por qué no?

10. Si a un hilo que rodea la Tierra se le da una holgura de 1 metro, ¿cuál es la separación que habrá entre la superficie de la Tierra y el hilo?

11. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre superficies:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de superficie.
- Citar las unidades no estándares más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de superficies.
- Hacer una lista de unidades de superficie y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de superficies y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de superficies.
- Estimar medidas extremas o especiales de longitud (medida y distribución de un piso, la superficie terrestre, etc.).

12. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre amplitudes angulares:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de amplitud angular.
- Citar las unidades más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de amplitudes.
- Hacer una lista de unidades de amplitud y objetos a medir y relacionar cada objeto con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de amplitudes y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de amplitud.
- Estimar medidas extremas o especiales de amplitudes angulares (ángulos de un grado de amplitud, ángulos superiores a 360º, etc.).
- Describir el uso de la amplitud angular como medida indirecta de otras magnitudes (peso, intensidad de la corriente, etc.)

13. Identificación de situaciones de medida y referentes sobre volumen:
- Citar distintas situaciones y buscar el referente más adecuado para comparar cantidades de volumen.
- Citar las unidades no estándar más utilizadas en distintos contextos (casa, colegio,...) para la medida de volúmenes.
- Hacer una lista de unidades de volumen y volúmenes a medir y relacionar cada uno con la unidad más adecuada.
- Citar tres situaciones de medida de volúmenes y decir cual es el error máximo admisible.
- Citar varios instrumentos de medida de volumen.
- Estimar medidas extremas o especiales de volumen (volumen de agua contenida en una piscina, maletero de un coche, etc.).

Bibliografía

Baroody, A. J. y Coslick,R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. London: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la*

préparation du concours CRPE. Talence: IREM d' Aquitaine.
Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.
Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]
Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.
Moreno, F., Gil, F. y Frias, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (p. 503-532). Madrid: Síntesis
Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.
Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

V.

ESTOCÁSTICA PARA MAESTROS

Carmen Batanero
Juan D. Godino

Índice

Capítulo 1: ESTADÍSTICA

Capítulo 2: Probabilidad

V.

Estocástica para Maestros

Capítulo 1:

ESTADÍSTICA

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE ESTADÍSTICA EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

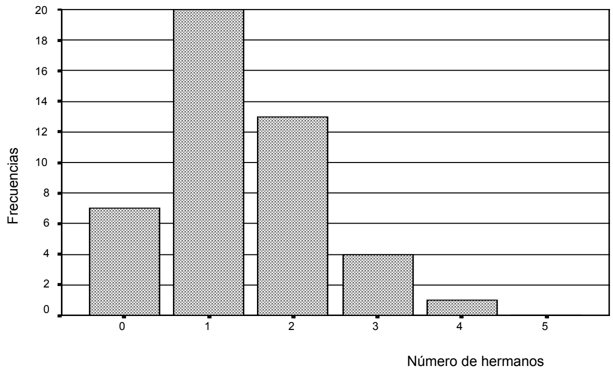
Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria

1. Lee este texto y completa la tabla, en tu cuaderno, con el número de veces que aparece cada letra vocal. "UN SOL PARA CONOCER. UNA LUNA PARA SENTIR. UN LIBRO PARA APRENDER. UN MUNDO PARA VIVIR"

- Representa los datos en un diagrama de barras.
- ¿Cuántas letras vocales tiene el texto?
- ¿Qué letra vocal es la moda en el texto?
- Haz otra tabla para las consonantes y complétala
- ¿Cuántas letras son consonantes?
- ¿Qué letra consonante es la moda?

VOCALES	FRECUENCIA

2. En este diagrama de barras se ha representado el número de hermanos que tienen los alumnos y alumnas de la clase de 6º. ¿Cuántas personas tienen un solo hermano? ¿Y cinco hermanos? ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en 6º?



3. El gasto mensual en electricidad de una familia en el último año ha sido el siguiente:

E	F	M	A	My	J	Jl	Ag	S	O	N	D
3.500	3.278	4.251	3.740	3.125	3.470	2.432	2.560	3.680	2.549	4.578	4.689

¿Cuál ha sido el gasto medio mensual? ¿Y el gasto medio diario?

4. La familia López ha recorrido esta semana las siguientes distancias: 3 km, 4 km, 5 km, 7 km, 6 km, 10 km u 8 km. ¿Qué media de kilómetros diarios ha hecho?

5. Construye un diagrama de barras para cada una de estas tablas de frecuencias

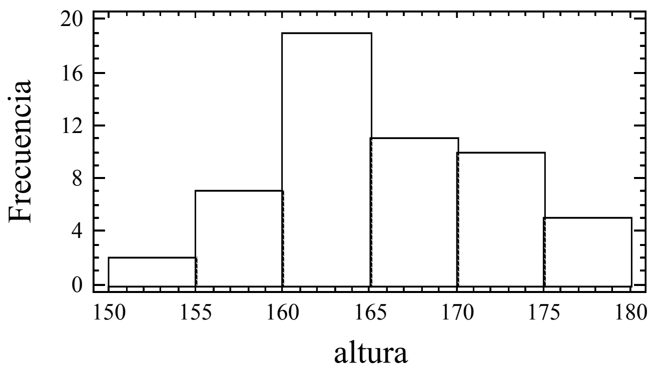
Colores	Nº de coches
ROJO	38
BLANCO	50
NEGRO	26
GRIS	20
AMARILLO	6

Equipos	Puntos
LEONES	20
OSOS	35
GUEPARDOS	25
GACELAS	40

6. Este histograma representa las alturas de un grupo de personas.

- ¿Cuántas personas miden menos de 155 cm? ¿Y más de 155 cm?

- ¿Cuántas personas forman el intervalo de mayor altura?



7. Los resultados, en centímetros, de la prueba de salto "a pies juntos" fueron:

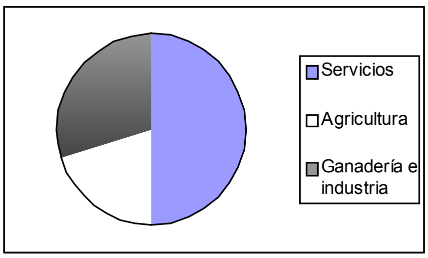
167	150	190	153	120	186	130	142
181	163	146	183	171	136	184	151
149	136	146	139	142	107	167	155

`	Nº de personas
ENTRE 0 y 120	
ENTRE 121 y 150	
ENTRE 151 y 180	
MÁS DE 180	

Completa la tabla y construye un histograma.

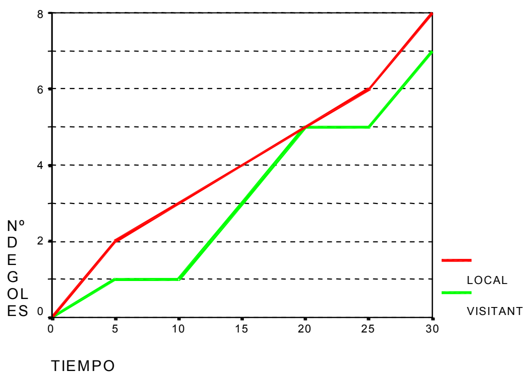
8. La actividad profesional de las personas de una ciudad se ha representado en este gráfico de sectores.

- ¿A qué actividad profesional se dedica el mayor número de personas de esa ciudad?
- Si las personas que trabajan son 20.000, 8.000 y 12.000, dí qué número corresponde a cada actividad.



9. En esta gráfica están representados los goles marcados en el primer tiempo de un partido de balonmano.

- ¿Cuál era el resultado en el minuto 5?
- ¿En qué minuto iban empatados a goles?
- ¿Qué equipo iba ganando en el primer tiempo?



B: Conocimientos Matemáticos

1. ESTADÍSTICA Y SUS APLICACIONES

1.1.¿Qué es la estadística?

Son muchas las definiciones posibles de estadística, y entre ellas hemos elegido las dos siguientes que reflejan bien las características de esta ciencia:

> *"La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final.*[1]

> *La estadística es la ciencia de los datos. Con más precisión, el objeto de la estadística es el razonamiento a partir de datos empíricos. La estadística es una disciplina científica autónoma, que tiene sus métodos específicos de razonamiento. Aunque es una ciencia matemática, no es un subcampo de la Matemática. Aunque es una disciplina metodológica, no es una colección de métodos.*[2]

1.2. Breves notas históricas

Los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de *Números* aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. No olvidemos que precisamente fue un censo lo que motivó del viaje de José y María a Belén, según el Evangelio. Los censos propiamente dichos eran ya una institución el siglo IV a.C. en el imperio romano.

Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surge la *Aritmética política*, desde la escuela alemana de Conring, quien imparte un curso con este título en la universidad de Helmsted. Posteriormente su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir se observan ya los elementos básicos del método estadístico. Para los aritméticos políticos de los siglos XVII y XVIII la estadística era el arte de gobernar; su función era la de servir de ojos y oídos al gobierno.

La proliferación de tablas numéricas permitió observar la frecuencia de distintos sucesos y el descubrimiento de leyes estadísticas. Son ejemplos notables los estudios de Graunt sobre tablas de mortalidad y esperanza de vida a partir de los registros estadísticos de Londres desde 1592 a 1603, o los de Halley entre 1687 y 1691 para resolver el problema de las rentas vitalicias en las compañías de seguros. En el siglo

[1] Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.
[2] Moore, D. S. (1991). Teaching Statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the Twenty-First Century,* (pp. 14-25). Mathematical Association of America.

XIX se descubren las leyes de los grandes números con Bernouilli y Poisson.

Otro problema que recibe gran atención por parte de los matemáticos de su tiempo, como Euler, Simpson, Lagrange, Laplace, Legendre y Gauss es el del ajuste de curvas a los datos. La estadística logra con estos descubrimientos una relevancia científica creciente, siendo reconocida por la British Association for the Advancement of Science, como una sección en 1834, naciendo así la Royal Statistical Society. En el momento de su fundación se definió la estadística como *"conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes"*.

Se crearon poco a poco sociedades estadísticas y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas se creó en Francia en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas de cada país en relación con los demás, para determinar los factores determinantes del crecimiento económico y comenzaron los congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos usados. El primero de ellos fue organizado por Quetelet en Bruselas en 1853. Posteriormente, se decidió crear una sociedad estadística internacional, naciendo en 1885 el *Instituto Internacional de Estadística (ISI)* que, desde entonces celebra reuniones bianuales. Su finalidad específica es conseguir uniformidad en los métodos de recopilación y obtención de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la estadística en la solución de los problemas políticos y sociales. En la actualidad el ISI cuenta con 5 secciones, una de las cuales, la IASE, fundada en 1991, se dedica a la promoción de la Educación Estadística.

1.3. Panorama actual

Aunque es difícil dividir la estadística en partes separadas, una división clásica hasta hace unos años ha sido distinguir entre *estadística descriptiva y estadística inferencial.*

La *estadística descriptiva* tiene como fin presentar resúmenes de un conjunto de datos y poner de manifiesto sus características, mediante representaciones gráficas. Los datos se usan para fines comparativos, y no se usan principios de probabilidad. El interés se centra en describir el conjunto de datos y no se plantea el extender las conclusiones a otros datos diferentes o a una población.

La *inferencia estadística,* por el contrario, estudia los resúmenes de datos con referencia a un modelo de tipo probabilístico. Se supone que el conjunto de datos analizados es una muestra de una población y el interés principal es predecir el comportamiento de la población, a partir de los resultados de la muestra.

Las capacidades de cálculo y representación gráfica de los ordenadores actuales permiten la obtención de una amplia variedad de gráficos y cálculos estadísticos de una forma sencilla y han hecho posible la aparición de una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el *análisis exploratorio de datos,* introducido por Tukey. Es una perspectiva intermedia entre la estadística descriptiva y la inferencia y se da un papel importante a la visualización por medio de diferentes gráficos.

1.4. Estudios estadísticos

La estadística se ocupa del diseño de estudios en los que sea necesario la recogida de datos, el análisis de estos datos, y la predicción o toma de decisiones a partir de los resultados.

El siguiente ejercicio muestra un ejemplo de los tipos de predicciones que podemos hacer usando la estadística.

Ejercicios

1. Se toma una caja con 100 bolas blancas y el profesor sustituye r de ellas por bolas negras sin que los alumnos vean cuántas ha sustituido. Por turno cada uno de los alumnos con los ojos cerrados toma 10 bolas de la caja y rellena la ficha siguente:
Nombre------------
Nümero de bolas negras en la muestra
Porcentaje de bolas negras en la muestra
Estimación del número de bolas negras en la caja

2. El profesor en la pizarra completa con ayuda de los alumnos el siguiente gráfico de puntos. Se coloca un punto encima del valor del número de bolas negras en la muestra de 10, para cada uno de los alumnos.

Nümero de bolas negras en la muestra de 10 bolas

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

3. ¿Cuál será la mejor estimación del porcentaje de bolas negras en una muestra típica de 10 bolas? ¿Cuál será la mejor estimación del número de bolas negras en la caja? Finalmente se comprueba la fiabilidad de la estimación contando las bolas negras en la caja.

2. VARIABLES ESTADÍSTICAS. TABLAS Y GRÁFICOS

2.1. Población individuos y caracteres

Proyecto 1. ¿Cómo son los alumnos de la clase?
Objetivo: Se trata de elaborar un perfil de los alumnos, identificando el alumno típico y analizando si hay diferencias entre el chico y la chica típicos.
Datos: Se preparará una lista de las características de los alumnos que queremos estudiar analizando las diferentes formas en que podrían obtenerse los datos:

- Por simple observación: como el sexo, color de pelo y ojos, si usa o no gafas;
- Se requiere una medición: como el peso, talla o longitud de brazos extendidos;
- Habría que preguntar a los alumnos; es decir realizar una pequeña encuesta: número de hermanos, cómo viene al instituto; cuánto deporte practica, etc.

Los datos serán recogidos por los propios alumnos, mediante las diversas técnicas señaladas. Se requerirá un metro y una báscula, para tomar datos de los alumnos con un mismo instrumento. Se prepara una ficha como la siguiente para recoger datos de cada uno de los alumnos de la clase:

SEXO:
¿HACES DEPORTE? (Nada, poco, mucho):
PESO (kg.):
ALTURA (cm.):
LONGITUD DE LOS BRAZOS EXTENDIDOS EN CRUZ (cm.):
NUMERO DE CALZADO:
PESETAS QUE LLEVA EN ESTE MOMENTO EN EL BOLSILLO:

Una *población (o universo)* es el conjunto total de objetos que son de interés para un problema dado. Los objetos pueden ser personas, animales, productos fabricados, etc. Cada uno de ellos recibe el nombre de *elemento (o individuo)* de la población.

En el proyecto 1 recogemos datos de diferentes *variables* para los alumnos de la clase. Cada alumno de la clase es un *elemento* de la población *clase*.

Generalmente, en un estudio estadístico, estamos interesados en analizar algún aspecto parcial de los individuos que componen la población; por ejemplo, si se trata de personas, puede que nos interese, la altura, el peso, el color del pelo, el sueldo mensual que recibe, la opinión que le merece el partido que gobierna, etc. Estos aspectos parciales reciben el nombre de *caracteres* de los elementos de una población y son, por su naturaleza, *variables*, de forma que en distintos individuos pueden tomar valores o *modalidades* diferentes. Las variables de los estudios estadísticos reciben el nombre de *variables estadísticas.*

Ejercicios:

4. ¿Cuáles son las posibles modalidades de las variables recogidas en la clase, cuyos datos se incluyen en la tabla 1?
5. Sugiere otras variables que podrías recoger en este proyecto y analiza sus modalidades.

2.2. Tipos de estudios estadísticos. Censos y muestras extraídas de una población

El principal objetivo del análisis estadístico es conocer algunas de la propiedades de la población que interesa. Si la población es finita, el mejor procedimiento será la inspección de cada individuo (siempre que esto sea posible). Un estudio estadístico realizado sobre la totalidad de una población se denomina *censo.* Como todos recordais el último censo se ha llevado a cabo el año 2001.

Sin embargo, la mayoría de los problemas de interés, implican, bien poblaciones infinitas, o poblaciones finitas que son difíciles, costosas o imposibles de inspeccionar. Esto obliga a tener que seleccionar, por procedimientos adecuados, un subconjunto de *n* elementos de la población, que constituyen una *muestra de tamaño n*, examinar la característica que interesa y después generalizar estos resultados a la población. Esta generalización a la población se realiza por medio de la parte de la Estadística que se conoce con el nombre de *Inferencia Estadística.* Por ejemplo, el día que se hizo la recogida de datos de la clase, se obtuvieron datos de 60 alumnos, aunque había en total 94 alumnos matriculados. El análisis de los datos de esta muestra puede servir, sin embargo, para sacar conclusiones de toda la clase.

Para que estas conclusiones ofrezcan las debidas garantías es preciso comprobar que se cumple el requisito básico de que la muestra sea representativa. Los distintos métodos de selección de muestras representativas de una población se conocen con el nombre de *métodos de muestreo.*

La infomación estadística se puede usar también para estimar probabilidades de sucesos relativos a la población de interés.

Tabla 1: Datos sobre los alumnos

n.	sexo	deporte	peso	altura	longitud	calzado	ptas	n.	sexo	deporte	peso	altura	longitud	calzado	ptas
1	2	2	59	161	160	37	770	31	2	2	58	164	166	38	125
2	1	1	62	178	181	41	385	32	1	3	86	191	180	46	60
3	2	2	50	159	153	36	500	33	1	1	70	161	185	44	625
4	1	2	69	176	179	42	325	34	1	1	64	166	171	40	310
5	1	2	74	175	179	43	740	35	2	3	64	166	155	38	0

6	2	3	62	169	165	37	2600		36	2	1	70	156	152	35	175	
7	2	2	56	162	158	36	250		37	2	2	51	165	160	37	100	
8	2	2	58	162	163	37	225		38	2	2	62	167	159	38	1200	
9	2	1	52	170	171	38	501		39	2	2	58	160	160	37	215	
10	1	1	68	170	172	42	5450		40	1	3	71	185	187	43	700	
11	1	3	72	184	185	43	7500		41	1	3	68	175	172	42	475	
12	1	2	74	180	182	42	1785		42	1	3	74	183	178	45	1600	
13	1	2	66	175	177	41	0		43	2	3	55	160	154	37	400	
14	2	2	60	170	168	38	200		44	1	3	68	185	185	42	125	
15	2	1	60	165	161	38	4400		45	2	1	57	161	155	37	450	
16	2	3	55	163	160	36	700		46	2	3	57	169	164	38	1115	
17	2	2	60	167	165	37	120		47	2	1	68	158	150	36	400	
18	2	2	50	167	165	37	700		48	1	2	69	172	172	41	0	
19	2	2	52	160	157	35	2016		49	2	3	50	155	155	37	500	
20	2	1	53	164	160	37	875		50	2	1	58	163	162	38	1290	
21	2	2	58	163	166	38	285		51	2	1	66	168	168	39	125	
22	2	2	74	175	178	40	560		52	2	2	50	163	161	36	480	
23	2	2	63	173	180	39	3010		53	1	2	81	184	188	43	5120	
24	2	2	60	161	164	38	500		54	2	1	60	165	160	36	255	
25	2	2	53	162	162	37	1000		55	2	2	50	155	155	35	500	
26	1	3	82	174	180	41	275		56	1	2	65	179	171	35	90	
27	1	2	68	178	180	42	175		57	1	2	65	164	158	36	700	
28	2	1	64	172	175	37	690		58	2	2	62	174	179	40	0	
29	2	2	65	165	165	40	605		59	2	2	58	162	160	36	200	
30	2	1	46	160	158	37	5135		60	2	2	63	172	171	41	2000	

Sexo: 1= hombre; 2= mujer;

Deporte: 1=nada, 2=poco; 3= mucho

Ejercicios:

6. A partir de los datos de toda la clase, haz un recuento de las frecuencias en las diferentes modalidades para las variables sexo y hacer deporte. Si tomo una ficha al azar, ¿cuál sería la probabilidad de que corresponda a una chica? ¿y la de que el alumno en cuestión haga mucho deporte?

2.3. Variables estadísticas

Para representar los distintos tipos de datos empleamos variables. Una variable es un símbolo que puede tomar valores diferentes. Cuando estos valores son los resultados de un recuento estadístico, la llamamos *variable estadística,* y representa generalmente un cierto carácter de los individuos de una población.

Usualmente, las variables estadísticas se clasifican en *cualitativas* y *cuantitativas,* según que las modalidades del carácter que representan sean o no numéricas (Algunos autores no consideran las variables cualitativas, al considerar que también se puede asignar un número diferente a cada una de las modalidades de las variables cualitativas, con lo que quedarían asimiladas a las cuantitativas). Ejemplos de variables cualitativas son el grupo sanguíneo o la religión de una persona.

Dentro de las variables cuantitativas se distingue entre variables *discretas* y *continuas,* siendo discretas aquellas que por su naturaleza sólo pueden tomar valores aislados -generalmente números enteros- y continuas las que pueden tomar todos los valores de un cierto intervalo.

Así, los experimentos que consisten en el recuento de objetos, como pueden ser: número de miembros de una familia, número de nidos de aves en una parcela, etc. dan lugar a variables discretas, mientras que al medir magnitudes tales como el peso, el tiempo, capacidad, longitud, etc. se obtienen variables continuas.

Ejercicios:
7. Clasificar las variables del estudio realizado en la clase, según su tipo.
8. Pon otros ejemplos de variables estadísticas cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas.

2.4. Tablas de frecuencias

El listado de los distintos valores o modalidades de una variable estadística, junto con las frecuencias (absolutas o relativas) de aparición de cada valor es el resumen más primario de una colección de datos y recibe el nombre de *distribución de frecuencias.* Las distribuciones de frecuencias de datos cualitativos pueden representarse mediante una tabla de frecuencias, como se muestra en la Tabla 2. La *frecuencia absoluta* es el número de veces que aparece cada modalidad. La *frecuencia relativa* se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de casos en la muestra. El *porcentaje* es igual a la frecuencia relativa multiplicada por 100.

Tabla 2 : Distribución del 'color de los ojos' de los alumnos de una clase

Modalidad	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Negro	15	0.50	50.0
marrón	7	0.233	23.3
azul	3	0.100	10.0
otros	5	0.166	16.6
Total	30	1.00	100

Cuando la variable es numérica interesa también calcular las frecuencias acumuladas. Para cada valor de la variable, la *frecuencia acumulada* es el número de elementos con un valor de la variable menor o igual que el dado. Se obtienen sumando a la frecuencia de un valor todas las anteriores. Las frecuencias relativas acumuladas se obtienen dividiendo las frecuencias absolutas acumuladas por el número de datos. También pueden obtenerse sumando a la frecuencia relativa ordinaria todas las anteriores, como se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Distribución de frecuencias del número de calzado

Número de calzado	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
35	4	0.0667	4	0.0667
36	8	0.1333	12	0.2000
37	14	0.2333	26	0.4333
38	10	0.1667	36	0.6000
39	2	0.0333	38	0.6333
40	4	0.0667	42	0.7000
41	5	0.0833	47	0.7833
42	6	0.1000	53	0.8833
43	4	0.0667	57	0.9500
44	1	0.0167	58	0.9667
45	1	0.0167	59	0.9833
46	1	0.0167	60	1.0000

Ejercicios:

9. ¿Cuál es el valor o valores más frecuentes del número de calzado? ¿Qué tanto por ciento de alumnos calzan el 40 o un número mayor de calzado?
10. ¿Cuáles son las principales diferencias en la distribución de frecuencias del número de calzado de chicos y chicas? (Usa la información dada en la tabla 1)

2.5. Gráficos estadísticos

Las distribuciones de frecuencias de las variables estadísticas pueden representarse mediante tablas y gráficos. A menudo es preferible un gráfico, porque permite resaltar las principales características de la distribución. El denominado *gráfico de barras* permite ilustrar visualmente ciertas comparaciones de tamaño, especialmente cuando se precisa comparar dos muestras. En el diagrama de barras, cada uno de los valores de la variable correspondiente se representa en el eje de abscisas de un gráfico cartesiano, a intervalos igualmente espaciados. Para cada valor se dibuja una barra (o rectángulo) cuya altura ha de ser proporcional a la frecuencia absoluta o relativa de dicho valor.

Otro tipo de representación es el gráfico de *línea poligonal,* usado con ventaja para mostrar cambios de una variable a lo largo del tiempo. El gráfico de barras se puede usar para variables cualitativas pero el gráfico de líneas no.

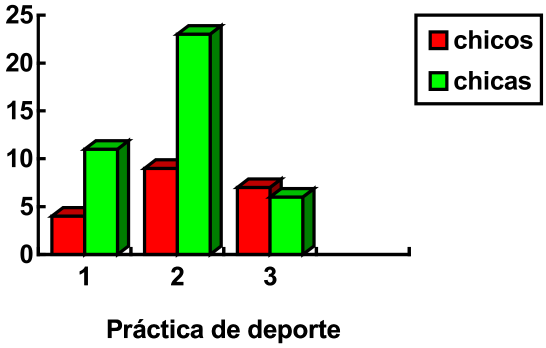


Figura 1: Diagrama de barras ('práctica de deporte' según sexo)

El *gráfico de sectores* (que informalmente se denomina a veces gráfico de la 'tarta' o 'pastel') muestra claramente cómo una cantidad total se reparte, así como el tamaño relativo de las distintas partes. El área de cada sector es proporcional a la frecuencia de la modalidad que representa. En el gráfico de sectores cada modalidad o valor de la variable se representa por un sector circular cuyo ángulo central y, por lo tanto también su área, es proporcional a la frecuencia. Una forma sencilla de construirlo es multiplicando la frecuencia relativa por 360; de este modo se obtiene la amplitud del ángulo central que tendrá cada una de las modalidades observadas.

En la elaboración de gráficos estadísticos es fundamental la precisión, la claridad en los títulos, la elección del tipo de gráfico y el uso de escalas adecuadas. Si uno de estos aspectos no se tiene en cuenta, el gráfico puede dar una idea inadecuada de la información que se trata de comunicar.

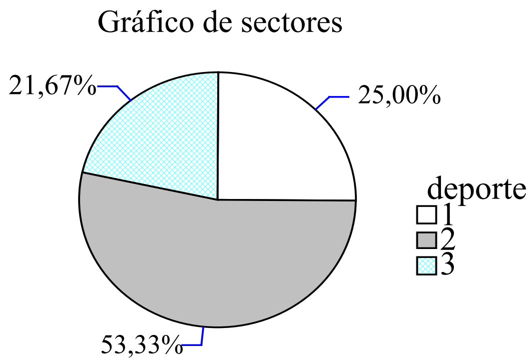


Figura 2: Gráfico se sectores de 'práctica de deporte'

Ejercicios:

11. Representa mediante un diagrama de barras la distribución de la variable "práctica de deporte" y analiza las ventajas de cada una de las dos representaciones.
12. Busca en la prensa ejemplos de gráficos estadísticos realizados inadecuadamente, razonando dónde se hallan los errores en su elaboración.
13. Completa los datos de la Tabla 4 y represéntalos gráficamente.

Tabla 4: Frecuencia de la variable 'número de hermanos'

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa acumulada
1	1	0.033		
2	10	0.333		
3	5	0.166		
4	7	0.233		
5	3	0.100		
6	1	0.033		
7	3	0.100		
Total	30	1.00		

2.6. Agrupación de variables en intervalos

Cuando la variable estadística que estudiamos es continua, como la altura de los alumnos, los valores observados suelen ser distintos unos de otros, o las frecuencias pequeñas, con lo cual una tabla de frecuencias y su correspondiente representación gráfica no constituyen buenos resúmenes estadísticos. Por dicho motivo se procede a definir unos intervalos de valores y se recuentan las frecuencias de los valores en cada *intervalo de clase* (Tabla 5). Los extremos de este intervalo se denominan *extremos de clase* y el punto medio *marca de clase.*

El histograma de frecuencias es la gráfica apropiada para representar estas tablas de frecuencias de datos agrupados en intervalos. En el histograma la frecuencia de cada intervalo se representa por medio de un rectángulo cuya área es proporcional a la frecuencia en dicho intervalo. Los histogramas pueden representar frecuencias absolutas o relativas. También podemos comparar una misma variable en dos muestras, utilizando histogramas con la misma amplitud de intervalos, como se muestra en la figura 4.

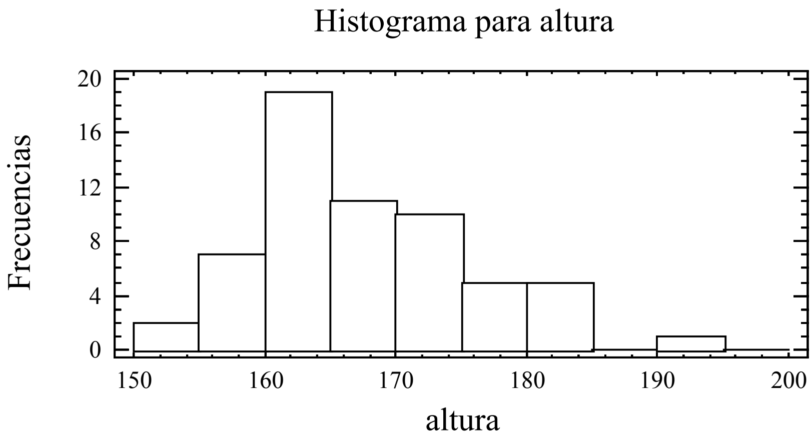


Figura 3: Histograma de frecuencias absoluta de la altura de los alumnos

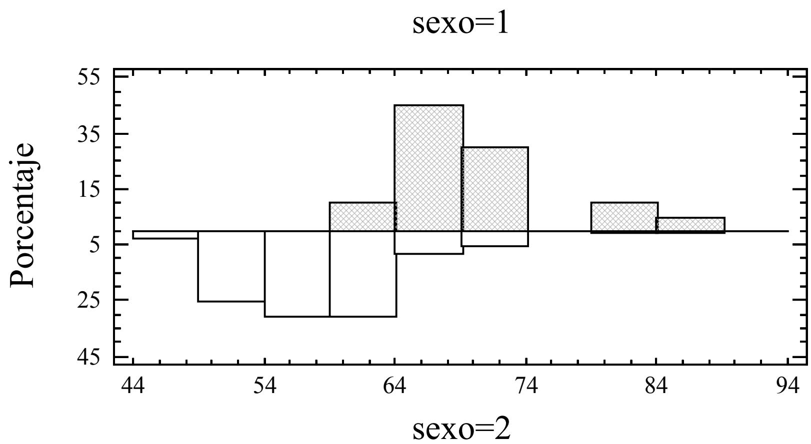


Figura 4: Histograma de frecuencias relativas de peso de alumnos según sexo

Tabla 5: Distribución de frecuencias de "pesetas en el bolsillo"

Nº de clase	Límite inferior	Límite superior	Marca de clase	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frec. abs. acumulada	Frec. rel. acumulada
1	0	500	250	33	0.5500	33	0.5500
2	500	1000	750	13	0.2167	46	0.7667
3	1000	1500	1250	3	0.0500	49	0.8167
4	1500	2000	1750	3	0.0500	52	0.8667
5	2000	2500	2250	1	0.0167	53	0.8833
6	2500	3000	2750	1	0.0167	54	0.9000
7	3000	3500	3250	1	0.0167	55	0.9167
8	3500	4000	3750	0	0.0000	55	0.9167
9	4000	4500	4250	1	0.0167	56	0.9333
10	4500	5000	4750	0	0.0000	56	0.9333
11	5000	5500	5250	3	0.0500	59	0.9833
12	5500	6000	5750	0	0.0000	59	0.9833
13	6000	6500	6250	0	0.0000	59	0.9833
14	6500	7000	6750	0	0.0000	59	0.9833
15	7000	7500	7250	1	0.0167	60	1.0000

Ejercicio:

14. Con los datos de la tabla de frecuencias 5, representa gráficamente el histograma de frecuencias absolutas de las "pesetas en bolsillo" con intervalos de amplitud 500.

2. 7. Representación gráfica de frecuencias acumuladas

En las figuras 5 y 6 representamos gráficamente las frecuencias acumuladas de las variables "número de calzado" y "pesetas en bolsillo". En los dos casos obtenemos una gráfica creciente, pues las frecuencias acumuladas son mayores a medida que aumentamos el valor de la variable. Sin embargo, las gráficas son ligeramente diferentes. En la variable sin agrupar "número de calzado" tiene forma de escalera, correspondiendo a cada valor de la variable una altura igual a su frecuencia acumulada.

En la variable agrupada marcamos en el extremo superior de cada intervalo de clase una altura igual a su frecuencia acumulada, uniendo a continuación los puntos obtenidos mediante una línea poligonal que se llama *polígono acumulativo de frecuencias.*

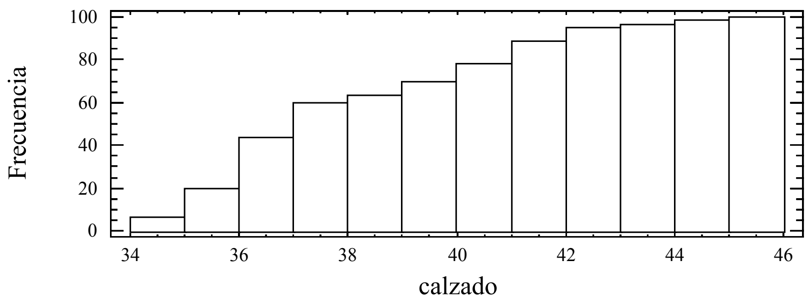


Figura 5: Diagrama de frecuencias acumuladas del "número de calzado"

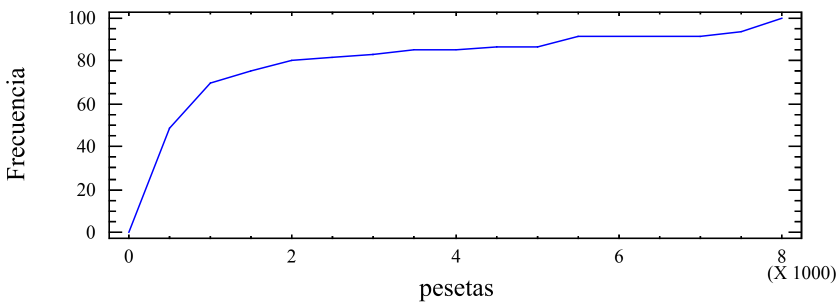


Figura 6: Polígono acumulativo de frecuencias de las "pesetas en bolsillo"

2. 8. Gráfico del tronco

El gráfico del tronco (en inglés -stem and leaf-) es utilizado para la representación de distribuciones de variables cuantitativas, consiguiendo con él, además de una gráfica de la distribución, la visualización de los valores de los datos que estamos estudiando. Para ejemplificarlo trabajaremos con el conjunto de datos que se muestra en la Figura 7, y que supondremos ha sido recogido en clase por los propios alumnos.

Peso en Kg.

Varones	Hembras
55 64 70 74 75 70	60 45 46 50 47 55
64 93 60 62 70 80	49 52 50 46 50 52
61 60 62 68 65 65	52 48 52 63 53 54
66 68 70 72 72 71	54 54 53 55 57 44
56 56 56 53 60 65	67 61 68 55 64 60

Figura 7

Para realizar este gráfico procederemos de la siguiente forma:

- Se redondean los datos a dos o tres cifras, expresando los valores con números enteros. En nuestro ejemplo, puesto que los datos disponibles constan sólo de dos cifras, este paso no es necesario.
- Se ordenan de menor a mayor, como se muestra en la Figura 8

44 45 46 46 47 48 49 50 50 50 52 52 52 52 53
53 53 54 54 54 55 55 55 55 56 56 56 57 60 60
60 60 60 61 61 62 62 63 64 64 64 65 65 65 66
67 68 68 68 70 70 70 70 71 72 72 74 75 80 93

Figura 8

- Se separan por la izquierda uno o más dígitos de cada dato, según el número de filas que se quiera obtener, en general no más de 12 ó 15. Cada uno de estos valores se escriben uno debajo del otro, trazando una línea a la derecha de los números escritos. Estas cifras constituyen el "tronco".En nuestro caso tomaremos la primera cifra para formar con ella el "tronco".
- Para cada dato original se buscan los dígitos escritos de su tronco y a la derecha de los mismos se escriben las cifras que nos habían quedado. Estas cifras forman las "hojas".

  De este modo obtenemos el gráfico del tronco para nuestros datos (Figura 9).

4	4 5 6 6 7 8 9
5	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7
6	0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4 5 5 5 6 7 8 8 8
7	0 0 0 0 1 2 2 4 5
8	0
9	3

Figura 9: Gráfico del trondo del peso de los alumnos

Como se observa, el resultado es, en la práctica, un histograma de amplitud de intervalo 10, que además de mostrarnos la forma de la distribución, presenta todos los datos ordenados. Esta representación puede ser ampliada o condensada para aumentar o disminuir el número de filas, subdividiendo o fundiendo dos o más filas adyacentes. Por ejemplo, para extender el gráfico de la Figura 9, podemos subdividir en dos cada fila de la siguiente forma: marcamos con un asterisco las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 0 a 4 y con un punto las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 5 a 9. Este nuevo diagrama, que podemos observar en la Figura 10 recibe el nombre de gráfico del "tronco extendido".

4*	4
4.	5 6 6 7 8 9
5*	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
5.	5 5 5 5 6 6 6 7
6*	0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4
6.	5 5 5 6 7 8 8 8
7*	0 0 0 0 1 2 2 4
7.	5
8*	0
9.	3

Figura 10: Gráfico del tronco extendido del peso de los alumnos

Al comparar el gráfico del tronco con un histograma de frecuencias observamos las siguientes ventajas:

- Su fácil construcción, especialmente con papel cuadriculado.
- Se pueden observar los datos con más precisión que en el histograma, pues los rectángulos pueden ocultar diferencias importantes entre los valores, mientras que en el gráfico del tronco estas lagunas pueden ser fácilmente detectadas y observadas.
- Pueden obtenerse a partir de él rápidamente los estadísticos de orden, como los valores máximo y mínimo, la mediana, cuartiles, percentiles y sus rangos, así como la moda.
- Es fácil comparar dos muestras de datos en el mismo gráfico, como vemos en la figura 11.

Como contrapartida observamos que no podemos elegir la amplitud del intervalo, como en el caso del histograma, sino que viene impuesta por el sistema de numeración. Tampoco podemos escoger la escala de la representación gráfica, que viene impuesta por el espaciado del papel empleado.

CHICOS		CHICAS
	4*	4
	4.	5 6 6 7 8 9
	5*	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
5	5.	5 5 5 6 6 6 7
4 4 2 2 1 0 0	6*	0 0 0 1 3 4
8 8 6 5 5	6.	5 7 8
2 2 1 0 0 0 0	7*	
5	7.	
0	8*	
3	9.	

Figura 11: Gráfico del tronco extendido del peso para chicos y chicas

3. CARACTERÍSTICAS DE POSICIÓN CENTRAL Y DISPERSIÓN DE UNA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Supongamos que tenemos que elegir en la clase al alumno/a cuyas características representen mejor cada una de las variables recogidas. ¿A quien elegirías? ¿Qué valores elegirías como mejor representante de cada una de las variables analizadas? En lo que sigue estudiaremos la forma de resumir una distribución de datos.

3.1. Medidas de tendencia central

La comparación de dos distribuciones de frecuencias correspondientes, por ejemplo, a muestras distintas de una misma variable (como "número de hermanos", "altura", etc.), puede hacerse de una manera directa por medio de la tabla, o visualmente con ayuda de gráficos estadísticos. Pero también puede hacerse eligiendo un valor representativo de cada muestra. La media, la moda y la mediana son soluciones matemáticas idóneas para este problema según distintas circunstancias. Reciben el nombre de *'estadísticos' o características de posición (o tendencia) central.*

La media aritmética:

Es la principal medida de tendencia central. Es el número que se obtiene sumando todos los valores de la variable estadística (x_i) y dividiendo por el número de valores (N). Si un valor aparece varias veces debe ponderarse por su frecuencia (f_i). Simbólicamente,

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i f_i}{N}$$

La media es *la mejor estimación* de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma. Esta es la propiedad de la media que usamos cuando calificamos a un alumno a partir de varias evaluaciones o cuando estimamos el tiempo de espera en la parada de un autobús. Por tanto sirve para resolver problemas como el siguiente:

Un objeto pequeño se pesa con un mismo instrumento por ocho estudiantes de una clase, obteniéndose los siguientes valores en gramos: 6'2, 6'0, 6'0, 6'3, 6'1, 6'23, 6'15, 6'2 ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

La media es la *cantidad equitativa* a repartir cuando tenemos diferentes cantidades de una cierta magnitud y queremos distribuirla en forma uniforme, como cuando hablamos del número medio de niños por familia o de la renta per cápita, o en el siguiente ejemplo:

Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Otras propiedades de la media son las siguientes:

1) La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución.
2) El valor medio es influenciado por los valores de cada uno de los datos.
3) La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos. Incluso puede no tener "sentido" para los datos considerados (como decir que el número medio de hijos en las familias españolas es 1.1).
4) Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.
5) La media es un "representante" de los datos a partir de los que ha sido calculada.

6) La media se expresa en las mismas unidades de medida que los datos.

Ejercicios:

15. Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 58 kgs y el de los hombres de 72. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

16. La media en fluidez verbal de una clase de un colegio es de 400. Si extraemos una muestra aleatoria de 5 estudiantes y resulta que la puntuación de los 4 primeros es de 380, 420, 600, 400. ¿Cuál sería aproximadamente la puntuación esperada para el quinto estudiante?

17. Para aprobar cierta asignatura, un estudiante necesita obtener una puntuación media de 6 (o más) entre cuatro exámenes. Las puntuaciones de Pedro en los tres primeros fueron de 3'5, 6'6 y 6'2. ¿Qué puntuación mínima necesita obtener en el cuarto examen para aprobar la asignatura?

18. La edad media de los 175 alumnos de una escuela es de 8 años, y la de los 12 adultos (profesores y personal) es de 40 años. ¿Cuál es la edad media de todas las personas de esa escuela?

La moda

Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia. Por ejemplo, en la Tabla 3 la moda del número de calzado es el 37.

En una distribución puede haber más de una moda. Si existe una sola moda se llama *unimodal,* si existen dos *bimoda*l, si hay más de dos se llama *multimodal*. En general es una medida de tendencia central poco eficaz ya que si las frecuencias se concentran fuertemente en algunos valores al tomar uno de ellos como representante los restantes pueden no quedar bien representados, pues no se tienen en cuenta todos los datos en el cálculo de la moda. Sin embargo, es la única característica de valor central que podemos tomar para las variables cualitativas. Además su cálculo es sencillo.

La mediana

Si suponemos ordenados de menor a mayor todos los valores de una variable estadística, se llama mediana al número tal que existen tantos valores de la variable superiores o iguales como inferiores o iguales a él.

- Por ejemplo si en una familia los niños tienen 3, 5 y 8 años, la edad del niño mediano es 5 años. La mediana es igual a 5.
- Si nace un nuevo bebé (0 años) ahora tenemos dos niños medianos, uno de 3 y otro de 5 años. En este caso hay una indeterminación y para resolverla tomamos como mediana el valor 4 (media entre 3 y 5).

Para calcular la mediana a partir de una tabla de frecuencias o de un polígono de frecuencias acumuladas, observamos que la frecuencia relativa acumulada que corresponde a la mediana es exactamente igual a 1/2. Por tanto, en la Tabla 3 (número de calzado) y ya que al número de calzado 37 corresponde una frecuencia acumulada 0’43 y al número 38 una frecuencia acumulada 0’60 la mediana es igual a 38. Esto lo podemos ver mejor en el diagrama de frecuencias acumuladas (figura 5).

La mediana presenta ciertas ventajas como medida de tendencia central frente a la media en algunas distribuciones, ya que no se ve afectada por los valores extremos de las observaciones; por ello su uso es particularmente indicado en las distribuciones asimétricas. También se puede aplicar con variables estadísticas ordinales, mientras que la media no se puede aplicar en estos casos.

3.2. Características de dispersión

Las características de dispersión son estadísticos que nos proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central. Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, indicando un valor cero la ausencia de dispersión.

Una de tales medidas puede ser la diferencia entre el valor mayor y el menor de la distribución de frecuencias, que recibe el nombre de *recorrido (o rango).* En su cálculo sólo intervienen dos valores (el máximo y el mínimo) por lo que es escasamente representativa de la dispersión del conjunto de datos.

- El rango para la distribución del "número de calzado" es igual a 11 (46 – 35).

La medida de dispersión más utilizada es la *desviación típica* (s), que es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la diferencia entre cada valor y la media dividida dicha suma por el número de valores; su cuadrado recibe el nombre de *varianza* y viene dada, por tanto, por la siguiente expresión:

$$s^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

Ejercicios:

19. ¿Qué se puede decir sobre el resultado de un examen, si la distribución de las puntuaciones de los alumnos verifican lo siguiente?:
a) La desviación típica es cero.
b) El rango es grande, pero la desviación típica es pequeña
c) El rango es pequeño, pero la desviación típica es grande.

20. Inventa un problema referido a calificaciones de matemáticas de un curso cuya media sea aproximadamente 5 y cuya desviación típica sea aproximadamente 2.

21. En los exámenes realizados por Lucía, la mediana fue de 8'8, su puntuación media fue de 9'0 y el rango fue 0'8. ¿Cuáles fueron las puntuaciones de los tres exámenes?

4. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. En la tabla adjunta presentamos los resúmenes estadísticos de las variables consideradas en la encuesta realizada en clase.

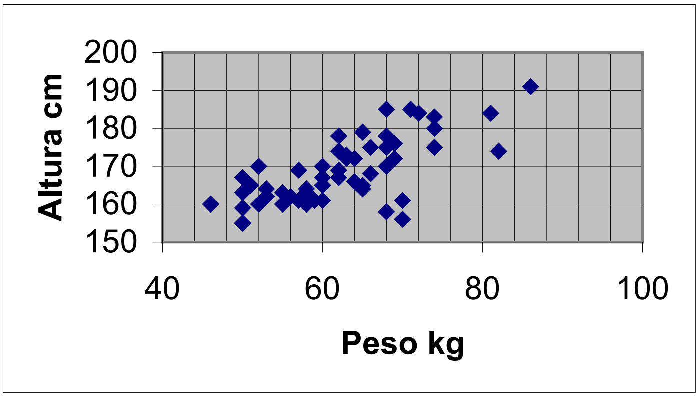
   a) Razona qué promedio es más adecuado para cada variable.
   b) ¿Cuál de las variables tiene mayor /menor dispersión?
   c) ¿Qué alumno (ver Tabla 1 de datos) sería más representativo en cada una de las variables?
   d) ¿Hay algún alumno que sea representativo en todas las variables?

Estadísticos de las variables del muestreo realizado en clase

Variable	Peso	Altura	Longitud	Calzado	Pesetas
Media	62.38	168.46	167.7	38.8	1026.87
Mediana	62	166.5	165	38	500
Moda	58	161	160	37	0
Desviación típica	8.57	8.41	10.29	2.77	1530.50
Mínimo	46	155	150	35	0
Máximo	86	191	188	46	7500
Rango	40	36	38	11	7500
Tamaño de muestra	60	60	60	60	60

2. En relación a los datos recogidos en clase (Tabla 1),
a) ¿Son más altos los alumnos que practican mucho deporte?
b) ¿Reciben las chicas más dinero que sus compañeros?
Razona las respuestas basándote en lo que has aprendido sobre la estadística.

3. En este diagrama de dispersión, indica si existe relación entre la altura y el peso. Estima la altura de una persona que pesa 60 kg.
¿Podrías dibujar una recta que sirva para calcular aproximadamente la altura en función del peso?



4. A partir del gráfico del tronco de la variable "Longitud de brazos extendidos", que se muestra a continuación, calcula
a) el máximo, mínimo, mediana y cuartiles.
b) Calcula el tanto por ciento de alumnos con brazos más largos y más cortos que los tuyos.

15*	0234
15.	555578889
16*	00000001122344
16.	55556688
17*	1111222
17.	5788999
18*	000012
18.	55578

5. Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

	Altura saltada en cm.									
Alumno	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gia	Hilda	Ines	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

6. A continuación reproducimos datos sobre número de pulsaciones por minuto en diversas especies animales[3]

[3] Ejemplo tomado de Friel, Mokros y Russell (1992). Statistics: Middles, means and in-betweens. Palo Alto, CA: Dayle Seymour.

1	6	Ballena
2	5 9	Camello, Tiburón
3	0 5 5 7 8 8	Elefante, Caballo, Trucha, Merluza, Salmón, Dorada
4	0 0 2 4 7 8 8 8	Mula, Burro, León, Foca, Caimán, Cocodrilo, Bacalao, Rana
5	5 5 9 9	Vaca, Oso, Carpa, Perca
6	6	Jirafa
7	0 0 0 0 5	Hombre, Ciervo, Avestruz, Cerdo, Oveja
8	0	Ganso
9	0 2 5	Perdiguero, Mastín. Fox Terrier
10	0	Collie
11	0	Delfín
12	0 5	Canguro, Pekinés
13	0	Gato
14		
15	0	Conejo
16		
17	0	Paloma
18		
19		
20		
21	1	Pavo
22		
23		
24	0	Zorro
25		
26	8	Pavo
27		
28		
29		
30	0 1	Puercoespín, Aguila
31	2	Codorniz
32	0	Pollo
33		
34	2 7	Halcón, Buitre
35		
36		
37	8	Cuervo
38	0 8	Grajo Comadreja
39	0	Ardilla
40	1	Gaviota
.		
.		
58	8	Murciélago
59		
60	0	Ratón

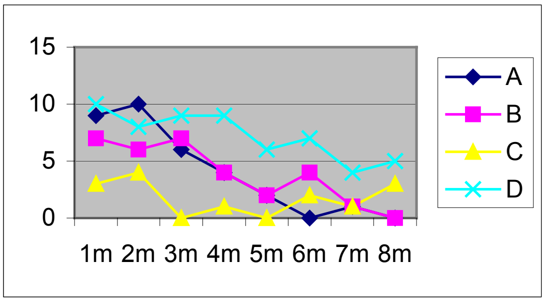
a) ¿Te parece que la media sería un estadístico que representaría bien este conjunto de datos? ¿Y la moda?

b) ¿Encuentras que alguna de las especies es atípica, debido a que su número de pulsaciones está claramente alejada de la mayoría?

7. Cuatro jugadoras de baloncesto se han sometido a la siguiente prueba: Cada una de ellas ha hecho 10 lanzamientos a canasta a una distancia de 1m, otros 10 lanzamientos desde 2m, y así sucesivamente hasta 8m. En cada caso se han anotado los siguientes encestes:

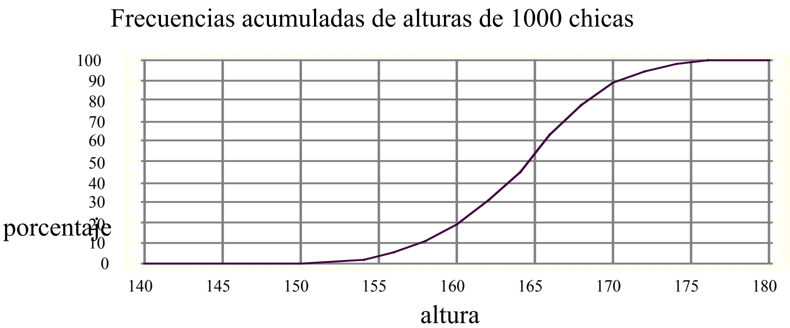
Jugadora	1m	2m	3m	4m	5m	6m	7m	8m
A	9	10	6	4	2	0	1	0
B	7	6	7	4	2	4	1	0
C	3	4	0	1	0	2	1	3
D	10	8	9	9	6	7	4	5

¿Qué jugadora es más eficaz en el enceste?



Razona la respuesta usando resúmenes numéricos de los datos y la gráfica que se adjunta.

8. En la figura presentamos las frecuencias acumuladas de la altura de 1000 chicas.
   a) Calcula aproximadamente la mediana, máximo y mínimo.
   b) ¿Entre qué límites varía el 50 por ciento de los valores centrales?
   c) ¿Cuál es el valor de la altura tal que el 70 % de las chicas tiene una altura igual o inferior (percentil del 70%)?
   d) Si una chica mide 1.65, ¿En qué percentil está?
   e) Compara tu altura con la de estas chicas. ¿Qué porcentaje de chicas son más altas/ bajas que tú?
   f) ¿Qué valores de la estatura considerarías atípicos en esta distribución?



BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2000). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. [Recuperable en, http://www.ugr.es/local/batanero/].

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO,* 25, 41-58

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1993). Análisis exploratorio de datos; sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, nº 9, 25-31.

Vallecillos, A. (2001). Análisis exploratorio de datos. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 559-589). Madrid: Síntesis.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

V.

Estocástica para Maestros

Capítulo 2:

PROBABILIDAD

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE PROBABILIDAD EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Clasifica los enunciados en tres grupos según el grado de dificultad que les atribuyes (fácil, intermedio, difícil).
4) Para cada problema enuncia otros dos del mismo tipo, cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.
6) Consigue una colección de libros de texto de primaria. Busca en ellos tipos de problemas no incluidos en esta relación. Explica en qué se diferencian.

Enunciados de problemas incluidos en libros de primaria:

1. Indica cuáles de las siguientes experiencias se consideran como aleatorias y cuáles no:

- Sacar una carta de una baraja española y observar si es de oros.
- Observar si en las próximas 24 horas sale el sol.
- Poner agua a enfriar y observar si se congela a cero grados.
- Lanzar un tiro a una canasta de baloncesto y observar si el balón entra
- Dejar caer un huevo desde un tercer piso y observar si se rompe al chocar con el suelo.

2. En una bolsa hay 3 bolas amarillas, 4 azules y 1 verde. Indica con una cruz en la tabla siguiente el tipo de suceso en la experiencia de *sacar una bola de la bolsa y anotar su color:*

	Seguro	Posible	Imposible
Sacar una bola azul			
Sacar una bola roja			
Sacar una bola que no sea azul			
Sacar una bola que no sea roja			

3. Un dado tiene 2 caras pintadas de verde, 2 caras pintadas de amarillo y 2 caras

pintadas de rojo. Ana dice, "Yo gano si sale verde"; Bernardo dice, "Yo gano si sale amarillo o rojo" y Carlos dice, "Yo gano si no sale verde". ¿Cuál es la probabilidad que tiene de ganar cada niño y niña al tirar este dado?

4. Abel y Rosa juegan tirando un dado. Si sale un 5 gana Abel y si sale menos de 3 gana Rosa. ¿Cuántas veces habrá ganado cada uno, aproximadamente, después de tirar el dado 60 veces?

5. En una clase de 27 alumnos y alumnas, por cada 5 niñas hay 4 niños. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que salga al recreo, tras el profesor, sea una niña?

6. Juana y Jesús juegan tirando dos monedas a la vez y van apuntando los resultados. Juana elige ganar "si salen dos caras", mientras que Jesús elige ganar "cuando sale una cara y una cruz". Observa los resultados obtenidos en 50 tiradas.

Doscaras	C C	///// ///// ///
Dos cruces	+ +	///// ////
Una cara y una cruz	C +	///// ///// ///// ///// ///// ///

- ¿Cuántas veces ha ganada Juana?
- ¿Cuántas veces ha ganado Jesús?
- ¿Cuántas veces no ha ganado ninguno?

Juana ha pedido la revancha y han vuelto a tirar otras 50 veces. Estos son los resultados.

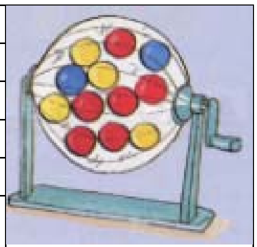
Dos caras	C C	///// ///// //
Dos cruces	+ +	///// ///// ////
Una cara y una cruz	C +	///// ///// ///// ///// ////

- ¿Cuántas veces ha ganado ahora cada uno?
- ¿Y si juntas los resultados de las dos partidas?

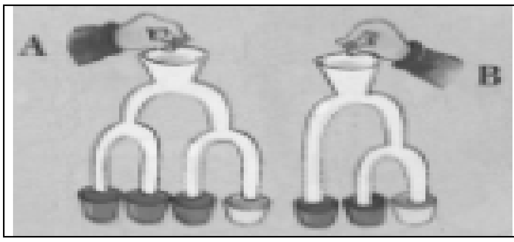
- ¿Cuál es el conjunto de todos los resultados posibles al tirar dos monedas al aire?
- ¿Qué es más fácil en la experiencia anterior: *sacar dos caras* o *sacar una cara y una cruz?*
- Únete a un compañero o compañera y repetid la experiencia de Juana y Jesús. Comparad vuestros resultados con los de las tablas obtenidas por ellos. ¿Crees que es una casualidad que haya ganado las dos partidas Jesús? ¿Por qué?

7. Copia y completa la tabla para la experiencia “sacar una bola del bombo su anotar su color”.

	Casos favorables	Probabilidad
Sacar una bola roja	6	6/12= 1/2
Sacar una bola azul		
Sacar una bola que no sea amarilla		
Sacar una bola blanca		
Sacar una bola que no sea blanca		



(Composición del bombo: 6 rojas, 4 amarillas y 2 azules)



7. ¿Cuál es la probabilidad, en cada caso, de que la bola caiga en un recipiente blanco?

¿Y en un recipiente negro?

B: Conocimientos Matemáticos

1. FENÓMENOS ESTOCÁSTICOS

La principal razón para introducir el estudio de las situaciones aleatorias y las nociones básicas sobre probabilidad en la enseñanza primaria es que las tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana.

1.1. Azar y lenguaje

En nuestras conversaciones, juegos, cuentos y canciones infantiles, prensa y literatura encontramos con frecuencia referencias al azar. Por ejemplo, los niños usan canciones como "Pito –pito" para echar a suertes en el escondite o en el rescate, juegan al parchís, la oca, organizan sorteos, etc.

- Si buscamos la palabra *aleatorio* en el "Diccionario del uso del español" (M. Moliner (1983) encontramos: *"Incierto. Se dice de lo que depende de la suerte o el azar", siendo el azar la "supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención intencionada humana ni divina".*
- Si buscamos la palabra *azar* encontramos: "*Del árabe 'zahr', flor, por la que se pintaba en una de las caras del dado".*

Esta definición nos remite al juego de dados, un ejemplo típico de lo que todo el mundo acepta como *fenómenos aleatorios*, donde una característica es el carácter imprevisible del resultado.

Hay muchas otras palabras relacionadas con "azar" y "aleatorio":

casual, accidental, eventual, fortuito, impensado, imprevisible, inesperado inopinado, ocasional, ...

También hay muchas expresiones que se usan en los juegos infantiles, con este mismo significado:

por suerte, por suerte, por chiripa, por chamba , de rebote, de rechazo, sin querer, sin intención, sin plan,...

Esta variedad de expresiones indica que los fenómenos aleatorios son cercanos a nuestra experiencia y que incluso los niños son capaces de observar el carácter imprevisible de estos fenómenos.

1.2. El azar en la realidad

Al tratar de buscar ejemplos de fenómenos aleatorios encontramos cuatro grandes campos de aplicación de la estadística relacionados con el hombre: el mundo biológico, físico, social y político.

Nuestro mundo biológico

Dentro del campo biológico, vemos que muchas características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano: el sexo, color de pelo, peso al nacer, etc. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, recuento de hematíes, etc, dependen incluso del momento en que se miden.

En medicina, la posibilidad de contagio o no en una epidemia, la edad en que se sufre una enfermedad infantil, la duración de un cierto síntoma, o la posibilidad de un diagnóstico correcto cuando hay varias posibles enfermedades que presentan síntomas parecidos varían de uno a otro chico. El efecto posible de una vacuna, el riesgo de reacción a la misma, la posibilidad de heredar una cierta enfermedad o defecto, o el modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre son ejemplos de situaciones aleatorias.

Cuando se hacen predicciones sobre la población mundial o en una región dada para el año 2050, por ejemplo, o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usado estudios probabilísticos de modelos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la extensión de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

En agricultura y zootecnia se utilizan estos modelos para prever el efecto del uso de fertilizantes o pesticidas, evaluar el rendimiento de una cosecha o las consecuencias de la extensión de una epidemia, nube tóxica, etc.

Por último, y en el ámbito de la psicofisiología, observamos el efecto del azar sobre el cociente intelectual o en la intensidad de respuesta a un estímulo, así como en los tipos diferentes de caracteres o capacidades de los individuos.

El mundo físico

Además del contexto biológico del propio individuo, nos hallamos inmersos en un medio físico variable. ¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos?. La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y probabilidad.

También en nuestro mundo físico dependemos de ciertas materias primas como el petróleo, carbón y otros minerales; la estimación de estas necesidades, localización de fuentes de energía, el precio, etc, están sujetos a variaciones de un claro carácter aleatorio.

Otra fuente de variabilidad aleatoria es la medida de magnitudes. Cuando pesamos, medimos tiempo, longitudes, etc, cometemos errores aleatorios. Uno de los problemas que se puede plantear es la estimación del error del instrumento y asignar una estimación lo más precisa posible de la medida. Por último, citamos los problemas de fiabilidad y control de la calidad de los aparatos y dispositivos que usamos: coche, televisor, etc.

El mundo social

El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones en las que predomina la incertidumbre. El número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra.

En la escuela, ¿podemos prever las preguntas del próximo examen?; ¿quién ganará el próximo partido?, ...

Para desplazarnos de casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público que puede sufrir retrasos. ¿Cuántos viajeros usarán el autobús? ¿Cuántos clientes habrá en la caja del supermercado el viernes a las 7 de la tarde?

En nuestros ratos de ocio practicamos juegos de azar tales como quinielas o loterías. Acudimos a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en los que tendremos que hacer cola para conseguir las entradas, ...

Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o por el contrario perderemos el dinero pagado; cuando compramos acciones en bolsa estamos expuestos a la variación en las cotizaciones,...

El mundo político

El Gobierno, a cualquier nivel, local, nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones que dependen de fenómenos inciertos y sobre los cuales necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno y todas estas estadísticas se refieren a distintas variables aleatorias relativas a un cierto colectivo. Entre las más importantes citaremos: el índice de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración - inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etc, de las que diariamente escuchamos sus valores en las noticias.

2. PROBABILIDAD. ASIGNACIÓN SUBJETIVA DE PROBABILIDADES

2.1. Experimento y suceso aleatorio

Un ejemplo cotidiano de situación aleatoria es el pronóstico del tiempo. Para llevarlo a cabo se aplican las técnicas de recogida de datos estadísticos y para un día dado no sabemos con seguridad cuál será la temperatura o si lloverá. Sin embargo, dependiendo de la época del año unos sucesos nos parecen más *probables* que otros. Utilizamos la expresión "*experimento aleatorio*" para describir este tipo de situaciones.

Ejercicios

1. Daniel y Ana son niños cordobeses. Acuden a la misma escuela y su profesor les ha pedido que preparen una previsión del tiempo para el día 24 de Junio, fecha en que comenzarán sus vacaciones. Puesto que están aún en el mes de Mayo, Daniel y Ana no pueden predecir exactamente lo que ocurrirá. Por ello, han buscado una lista de expresiones para utilizar en la descripción del pronóstico. He aquí algunas de ellas:

> *cierto; posible; bastante probable; hay alguna posibilidad; seguro; es imposible; casi imposible; se espera que; incierto; hay igual probabilidad; puede ser; sin duda, ...*

¿Podrías acabar de clasificar estas palabras según la mayor o menor confianza que expresan en que ocurra un suceso? Busca en el diccionario nuevas palabras o frases para referirte a hechos que pueden ocurrir y compáralas con las dadas anteriormente.

2. Busca en la prensa frases o previsiones sobre hechos futuros en que se usen las palabras anteriores. Clasifícalas según la confianza que tienes en que ocurran. Compara tu clasificación con la de otros compañeros.

En probabilidad llamamos "*experimento*" tanto a los verdaderos experimentos que podamos provocar como a fenómenos observables en el mundo real; en éste último caso, la propia acción de observar el fenómeno se considera como un experimento. Por ejemplo, la comprobación del sexo de un recién nacido se puede considerar como la realización de un experimento. Diferenciamos entre *experimentos deterministas* y *aleatorios*. Los primeros son aquellos que, realizados en las mismas circunstancias sólo tienen un resultado posible. Por el contrario, un experimento aleatorio se caracteriza por la posibilidad de dar lugar, en idénticas condiciones, a diferentes resultados.

Suceso es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Distinguimos entre *sucesos elementales,* cuando no pueden descomponerse en otros más simples y *suceso compuestos* cuando se componen de dos o más sucesos elementales por medio de operaciones lógicas como la conjunción, disyunción o negación.

Ejercicio

3. Poner tres ejemplos de experimentos aleatorios y deterministas. Para cada uno de ellos describir un suceso simple y otro compuesto.

2.2. Suceso seguro e imposible

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se denomina *espacio muestral* o *suceso seguro*. Suele representarse mediante la letra E. Por ejemplo, el espacio muestral obtenido al lanzar un dado sería E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Este espacio muestral es finito, pero podemos considerar un espacio muestral con infinitos resultados posibles. Por ejemplo, la duración de una lámpara podría variar en un intervalo continuo [0, 1000], donde hay infinitos puntos. Otros casos serían el peso o la talla de una persona tomada al azar de una población.

Puesto que el suceso seguro consta de todos los resultados posibles, siempre se verifica. Teóricamente podríamos también pensar en un suceso que nunca pueda ocurrir, como obtener un 7 al lanzar un dado ordinario. Lo llamaremos *suceso imposible* y lo representamos por $\emptyset$.

Ejercicios:

4. Describir el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos: a) lanzamiento simultáneo de dos monedas. b) suma de los puntos obtenidos al lanzar simultáneamente dos dados.

5. Describir un suceso imposible asociado a cada uno de los experimentos del ejercicio 2.

6. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar sucesivamente para estar seguro de obtener una bola de cada color?

7. Dos sucesos que no pueden ocurrir a la vez se llaman incompatibles. Por ejemplo, no pueden ocurrir a la vez los sucesos "obtener par" y "obtener impar" cuando lanzamos un dado. Tampoco podrían ocurrir a la vez "ser menor que 3" y "ser mayor que 5". ¿Podrías dar ejemplos de otros sucesos incompatibles?

2.3. Asignación de probabilidades subjetivas

La asignación de probabilidades mediante palabras o expresiones no es muy precisa. Por ello, para asignar probabilidades a sucesos, se hace corresponder un valor numérico entre 0 y 1.

Esto permite comparar diferentes sucesos, o bien situarlos sobre un gráfico, que llamaremos la escala de la probabilidad (Figura 1). Una vez realizado el ejercicio 1 individualmente o por parejas, pueden compararse los resultados de los diversos grupos. Puesto que cada alumno o grupo ha trabajado independientemente del resto, las probabilidades asignadas tienen un carácter subjetivo. Cada alumno podría usar diferente información o distintos criterios seguidos en su asignación.

Finalmente, podremos obtener unas probabilidades en las que toda la clase se muestre de acuerdo, tomando el valor medio o la mediana de las probabilidades asignadas individualmente a los diversos sucesos por los diferentes alumnos.

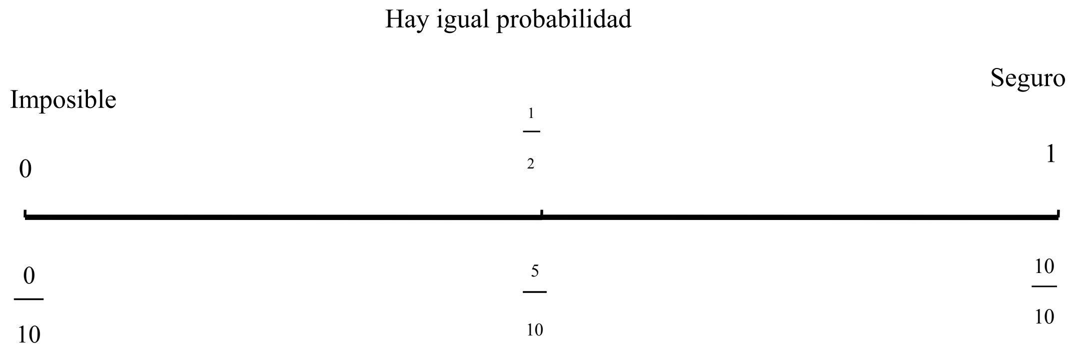


Figura 1

2.4 Probabilidad, como grado de creencia

Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1 llamado su *probabilidad.*

La probabilidad varía entre 0 y 1

El suceso seguro siempre ocurre y el suceso imposible no puede ocurrir. Asignamos una probabilidad 0 a un suceso que nunca puede ocurrir, por ejemplo, que salga un 7 al lanzar el dado. Asignamos un 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento; por ejemplo, al lanzar una moneda es seguro que saldrá o "cara o cruz".

Entre estos dos casos se encuentran el resto de los sucesos asociados a cada experimento. A pesar de que no sabemos cual de ellos ocurrirá en una prueba particular, algunos de ellos nos merecen más confianza que otros, en función de nuestros conocimientos sobre las condiciones de realización del experimento. Por medio de la probabilidad cuantificamos nuestro grado de creencia acerca de la ocurrencia de cada uno de los sucesos asociados a un experimento. *A cualquier otro suceso distinto del "imposible" y del "seguro" se le asigna un número entre 0 y 1.*

Este valor lo asignamos de acuerdo con nuestra información y la creencia que tengamos en la ocurrencia del suceso. Por ello, diferentes personas podrían asignar una probabilidad distinta al mismo suceso.

Por ejemplo, si nos preguntan por la probabilidad de que una cierta persona llegue a cumplir 25 años, diremos que es muy alta. Pero, si su médico sabe que esta persona sufre una enfermedad incurable dará un valor bajo para esta misma probabilidad.

Ejercicios:

8. Esperanza de vida: A partir de una tabla de vida, hacer predicciones sobre la probabilidad de vivir x años, o de vivir en el año 2010, según sea un chico o una chica, el profesor, etc.

9. Investigación. Discutir y ordenar las probabilidades de que se produzcan diversos inventos

antes de 5, o 10 años (vacunas, viajes interplanetarios, energía,...)
10. Accidentes:. Escribir una serie de frases sobre la reducción o aumento del número de accidentes, probabilidad de que se produzcan en una fecha dada y ordenarlas de mayor a menor probabilidad.

11. Resultados de elecciones. Con motivo de algunas elecciones escolares, locales, etc, plantear la mayor o menor probabilidad de que resulte elegido un candidato, o de que logre todos los votos, los 2/3, etc. Para ello utiliza los gráficos de alguna encuesta publicada en la prensa local (por ejemplo, un gráfico de barras o sectores).

12. Recoger de la prensa los datos de las temperaturas máxima y mínima durante una semana en las capitales de provincia. Confeccionar una tabla estadística con estos datos. ¿Cuál crees que será la temperatura máxima y mínima más probable la próxima semana?

13. Busca dos gráficos estadísticos diferentes que hayan aparecido en la prensa local recientemente. Para cada uno de ellos describe el experimento aleatorio al que se refieren; los sucesos asociados y cuál de ellos es más probable. ¿Podrías hacer un gráfico alternativo para representar la información en cada uno de los casos?

3. ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADES

3.1. Frecuencia absoluta y relativa. Estabilidad de las frecuencias relativas

Cuando realizamos un experimento N veces, llamamos frecuencia absoluta del suceso A el número N_A de veces que ocurre A. Al cociente $h(A)=N_A/N$ le llamamos frecuencia relativa del suceso. Se pueden observar las tres propiedades siguientes en las frecuencias relativas:

1. La frecuencia relativa del suceso varía entre 0 y 1;
2. La frecuencia relativa del suceso seguro siempre es 1 en cualquier serie de ensayos.
3. Supongamos que un suceso A se forma uniendo sucesos que no tienen elementos comunes. En este caso, la frecuencia relativa del suceso A es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que lo componen.

Por ejemplo, al lanzar un dado, h(par)= h(2)+h(4)+h(6).

El valor de la frecuencia relativa de un suceso no es fijo para N, puesto que se trata de un fenómeno aleatorio. Dos alumnos de la clase que realicen el mismo experimento 50 veces pueden obtener diferentes valores de las frecuencias absoluta y relativa del mismo suceso. Sin embargo, para una serie larga de ensayos, las fluctuaciones de la frecuencia relativa son cada vez más raras y de menor magnitud.

Este hecho tiene una demostración matemática, en los teoremas conocidos como "*leyes de los grandes números*". También puede observarse experimentalmente; por ejemplo, en las estadísticas recogidas en grandes series de datos sobre natalidad, accidentes, fenómenos atmosféricos, etc.

3.2. Estimación frecuencial de la probabilidad

La estabilidad de la frecuencia relativa en largas series de ensayos, junto con el hecho de que haya fenómenos para los cuales los sucesos elementales no son equiprobables, hace que pueda estimarse el valor aproximado de la probabilidad de un suceso a partir de la frecuencia relativa obtenida en un número elevado de pruebas. Este es el único método de asignar probabilidades en experimentos tales como "lanzar una chincheta" o "tener un accidente de coche en una operación retorno". Recuerda, no obstante, que el valor que obtenemos de esta forma es siempre aproximado, es decir, constituye una *estimación de la probabilidad.*

Sabemos, por ejemplo, que, debido a las leyes genéticas la probabilidad de nacer varón o mujer es aproximadamente la misma. Sin embargo, si en un hospital hacemos una estadística de nacimientos no sería raro que un día dado, de diez recién nacidos, 7 u 8 fuesen varones. Sería más raro que fuesen varones 70 o más entre cien recien nacidos, y todavía más difícil que más del 70% de entre 100.000 recién nacidos lo fuesen.

Con este ejemplo, vemos también que es muy importante el tamaño de la muestra en la estimación de las probabilidades frecuenciales. A mayor tamaño de muestra, mayor fiabilidad, porque hay más variabilidad en las muestras pequeñas que en las grandes.

Ejercicios

14 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones te parece verdadera cuando lanzamos un dado? ¿Por qué?

a) la probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6
b) la probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3;
c) la probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3;
d) la probabilidad de obtener un 1es mayor que 1/2 ;
e) Asigna un valor numérico a la probabilidad de obtener un 1.

15. *Experimentos con chinchetas.* Por parejas, los alumnos lanzan una caja de chinchetas sobre una mesa, contando cuántas de ellas caen de punta o de cabeza. Con los resultados de toda la clase puede estimarse, aproximadamente, la probabilidad de estos dos sucesos y el profesor puede aprovechar para hacer observar a los chicos que existen ejemplos de experimentos en los que la aplicación de la regla de Laplace no es pertinente.

3.3. Simulación de experimentos aleatorios

La realización de experimentos aleatorios usando dispositivos físicos, como dados, fichas, bolas, ruletas, etc. puede requerir bastante tiempo. A veces, incluso puede que no se dispongan de tales dispositivos en número suficiente para toda la clase. Una alternativa válida consiste en simular tales experimentos por medio de una tabla de números aleatorios. Este procedimiento incluso permite resolver problemas de probabilidad reales haciendo las simulaciones con un ordenador.

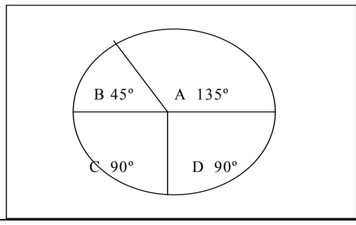
Llamamos *simulación* a la sustitución de un experimento aleatorio por otro equivalente con el cual se experimenta para obtener estimaciones de probabilidades de sucesos asociados al primer experimento. La estimación de la probabilidad que se obtiene con el experimento simulado es tan válida como si se tratase del experimento real. Este es el método que se emplea para obtener previsiones en las siguientes situaciones:

a) Experimentos complejos, como sería planificar el tráfico durante una operación salida de vacaciones.
b) Experimentos peligrosos, como estimar la temperatura de control o la velocidad de reacción permitida en una central nuclear.
c) Situaciones futuras: estudios ecológicos o sobre contaminación ambiental.

Ejercicios

16. Explica cómo usar la tabla de números aleatorios de la figura 3, o los números aleatorios generados por tu calculadora, para simular los siguientes experimentos:
a) Lanzar una moneda.
b) Tirar un dado.
c) Sacar bolas numeradas del 1 al 100 de una bolsa.
d) Girar una ruleta como la de la figura 2.
e) Observar el sexo de un recién nacido.
f) Observar el sexo de 2 recién nacidos

Figura 2



8231	4167	2530	7720	5676
1581	1649	564	3295	5354
4496	8048	9488	3297	7785
6922	7832	9461	9526	1473
4871	0564	2895	0249	4688
3781	8989	5516	2423	1518
2179	8540	9166	3163	8419
7023	5233	9033	9349	1256
2125	5297	0125	8071	9371
5108	7098	6403	6207	1817

Figura 3: Tabla de números aleatorios

4. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES. REGLA DE LAPLACE

Ejercicios

17. Cuando lanzamos un dado, obtenemos el espacio muestra E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Supongamos que este dado está perfectamente construído. No tenemos, por tanto, motivos para dar ventaja a ninguno de los resultados. ¿Cuál sería la probabilidad de cada uno de los resultados elementales, P(1) = ; ... ; P(6)= ? Razona la respuesta.

18. En el espacio muestral obtenido al lanzar un dado podemos formar subconjuntos suyos o *sucesos*, por ejemplo, A = "obtener par" = {2, 4, 6 }. Escribe los elementos de los siguientes subconjuntos de E:

B = "número impar" =
C "número primo" =
D = "número compuesto" =
F = "múltiplo de 3" =

Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos B, C, D, E. Razona las respuestas.

Si un espacio muestral consta de un número finito *n* de sucesos elementales y no tenemos motivo para suponer que alguno de ellos pueda ocurrir con mayor frecuencia que los restantes, la probabilidad de cada uno de estos sucesos elementales es *1/n*

En estos casos, podemos aplicar la *regla de Laplace* para calcular las probabilidades de los sucesos compuestos. Un suceso compuesto que se compone de *k* sucesos elementales, tiene, en este caso una probabilidad igual a *k/n* (regla de Laplace)

En el caso de que tengamos motivos para pensar que algún suceso puede darse con mayor frecuencia que otros (por ejemplo, al usar un dado sesgado) o bien cuando el espacio muestral es infinito, no podemos aplicar esta regla.

Ejercicios

19. Un experimento consiste en lanzar un dado con forma de dodecaedro, con los números del 1 al 12 en sus caras. Encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) Obtener un número par; b) Obtener un número primo; c) Obtener un divisor de 12.

20. Se toma un número comprendido entre 0 y 999
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cifra central sea mayor que las otras dos?

21. A un congreso asisten 100 personas. De ellas, 80 hablan francés y 40 inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que un asistente hable los dos idiomas?

Axiomas de la probabilidad

En los apartados anteriores hemos visto tres modos diferentes de asignar probabilidades, según el tipo de experimento aleatorio:

a) En el caso de espacios muestrales con un número finito de sucesos elementales en los que pueda aplicarse el principio de indiferencia, calculamos las probabilidades usando la *regla de Laplace.*
b) Si no podemos usar la regla de Laplace, pero tenemos información estadística sobre las frecuencias relativas de aparición de distintos sucesos, podemos obtener una *estimación frecuencial* de las probabilidades.
c) En los demás casos, el único modo de asignar las probabilidades a los sucesos es de modo *subjetivo.*

En todos los casos, las probabilidades cumplen unas mismas propiedades, que se recogen en la *definición axiomática de la probabilidad.*

Toda teoría matemática se desarrolla a partir de una serie de axiomas. Generalmente estos axiomas se basan en la abstracción de ciertas propiedades de los fenómenos que se estudian, que para el caso de la probabilidad son las tres primeras propiedades que hemos citado sobre las frecuencias relativas.

Como consecuencia, se considera que la probabilidad es toda aplicación, definida en el conjunto de los sucesos asociados a un experimento aleatorio, que cumpla las tres siguientes propiedades:

1. A todo suceso A le corresponde una probabilidad P(A), número comprendido entre 0 y 1.
2. La probabilidad del suceso seguro es 1, P(E)=1.
3. La probabilidad de un suceso que es unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de los sucesos que lo componen.

5. PROBABILIDADES EN EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Con frecuencia, los problemas de probabilidad involucran dos o más experimentos. Algunos ejemplos de estas situaciones son:

- Lanzar al aire dos monedas, tres monedas, ...
- Adivinar el sexo de una pareja de mellizos no idénticos, antes de hacer la ecografía.

- El número de bombillas defectuosas en una caja de 10 bombillas
- El número de estudiantes en una clase que ha estudiado la lección

En estas situaciones, algunas reglas sencillas pueden ser útiles para calcular la probabilidad. Estudiaremos algunos ejemplos para deducir estas reglas a partir de los mismos.

5.1. Resultados de un experimento compuesto

Ejemplo:

Al lanzar simultáneamente dos monedas, ¿es más fácil obtener una o dos caras?

Solución: Se trata de un *experimento compuesto* de dos experimentos simples:

- Primer experimento: Lanzar la primera moneda. E = { C, +}
- Segundo experimento: Lanzar la segunda moneda. E = { C, +}

Las posibilidades que se pueden presentar en el experimento compuesto se presentan en la tabla siguiente:

	Segundo Experimento	
Primer Experimento	C	+
C	CC	C+
+	+C	++

Observamos por tanto que la probabilidad de obtener dos caras es ¼ y la de obtener una cara es ½ puesto que tenemos dos posibilidades.

Ejercicios

22. Describe con la ayuda de una tabla todos los sucesos que puedes obtener en los siguientes experimentos compuestos:
a) Sexo de dos recién nacidos
b) Números al lanzar dos dados a la vez
c) Grupo sanguíneo de dos recién nacidos

23. De una bolsa con 3 bolas blancas y 3 bolas azules sacamos dos bolas. Describe todos los resultados si :
a) Devolvemos la primera bola a la caja después de ver el color
b) No la devolvemos

5.2. Cálculo de probabilidad a partir del diagrama en árbol

Otra forma de representar las posibilidades en este experimento compuesto es mediante un diagrama en árbol, que nos sirve también para observar la forma en que se obtiene la probabilidad.

Observa el diagrama que hemos construido para representar el experimento que consiste en lanzar dos monedas. En este diagrama anotamos, para cada experimento sus posibilidades y la probabilidad de los diferentes resultados

Primer Experimento

½ ½

Segundo Experimento C +

½ ½ ½ ½

	C	+	C	+
	¼	¼	¼	¼
Experimento Compuesto	CC	C+	+C	++

Regla de cálculo: Puesto que la mitad de las veces obtenemos cara en el primer experimento y de esta mitad, la mitad de las veces obtenemos cara en el segundo, la probabilidad de obtener dos caras es la mitad de un medio, esto es un cuarto.

- En el diagrama en árbol, la probabilidad final de un resultado es el producto de las probabilidades en cada rama que lleva a este resultado.

5.3. Experimentos dependientes e independientes

En el ejemplo del lanzamiento de dos monedas, el resultado de la segunda moneda no depende de lo que salió en la primera. Así observamos que:

- Los resultados del segundo experimento serían los mismos, si no se hubiera llevado a cabo el primero.
- Los resultados del segundo experimento tienen la misma probabilidad, sin depender del resultado del primero. La probabilidad de obtener cara en el segundo lanzamiento es ½ y esto no depende del resultado en el primer lanzamiento.

En otros casos, el segundo experimento depende del primero, por ejemplo:

- La probabilidad de aprobar un examen mejora con el número de exámenes.
- La probabilidad de que una persona tenga un infarto es mayor si ha tenido otro previamente.
- La probabilidad de que un niño tenga los ojos azules es diferente, según el color de los ojos de sus padres.

También en estos casos podemos usar el diagrama en árbol, pero teniendo en cuenta que ahora las probabilidades del segundo experimento dependen del resultado del primero.

Ejemplo:

En una caja tengo tres bolas rojas y dos verdes. Tomo dos bolas al azar sin devolver la primera, ¿Cuál es la probabilidad de tomar las dos verdes?

Solución:

Puedo construir de nuevo el diagrama en árbol, teniendo en cuenta las probabilidades en cada experimento y cómo varían las del segundo en función de los resultados en el primero:

Primer Experimento
3/5 2/5

Segundo Experimento R V
2/4 2/4 3/4 1/4

R V R V
3/10 3/10 3/10 1/10
Experimento Compuesto RR RV VR VV

Observa que en el experimento compuesto, de nuevo la suma de todas las probabilidades es igual a uno.

6. TALLER DE MATEMÁTICAS

1. Se lanza un moneda tres veces seguidas. a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 caras? b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más caras que cruces?

2. Se lanza un dado dos veces seguidas y se suman los puntos obtenidos. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 8? b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos sean menor o igual que 10?

3. Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas:
   - Lanzan dos dados sucesivamente y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
   - Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2 entonces Carmen gana 1 ficha.
   - Si resulta 3, 4, o 5 es Daniel quien gana una ficha.
   - Comienzan con un total de 20 fichas y el juego termina cuando no quedan más.

   ¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar, ¿cuál jugador preferirías ser? ¿Cuántas fichas debería ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

4. En una caja con 10 bombillas hay 3 fundidas. Tomamos dos bombillas de la caja.

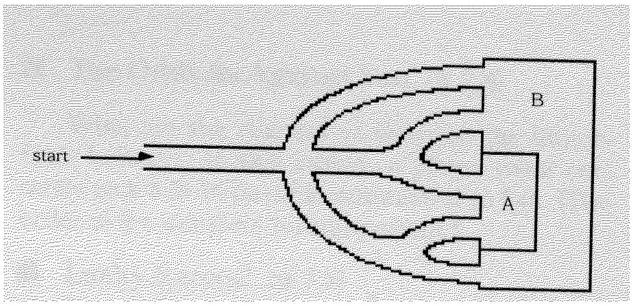
- ¿Depende la probabilidad de que la segunda bombilla sea defectuosa de si la primera estaba fundida?
- Con ayuda del diagrama en árbol calcula la probabilidad de que las dos bombillas sean defectuosas, de que ninguna esté fundida, de que al menos una esté fundida. ¿Cuál es el resultado más probable?

5. El 85 % de votantes en una ciudad acude a las elecciones. En una familia donde hay tres personas con edad de votar, ¿Cuál es la probabilidad de que las tres hayan votado?

6. Un jugador de baloncesto que suele encestar el 70 por ciento de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales tiene que lanzar una personal. Esto implica que si el jugador acierta el primer lanzamiento puede repetir otro. Por tanto puedo obtener 0, 1 o 2 puntos en el juego, fallando el primer lanzamiento (0 puntos) acertando el primero y

fallando el segundo (1 punto) o encestando los dos (2 puntos).
a) Utiliza la tabla de números aleatorios para simular el experimento y estima la probabilidad de que el jugador obtenga 0, 1, 2 puntos.
b) Con ayuda de un diagrama en árbol calcula la probabilidad de que el jugador obtenga 0, 1, 2 puntos.

7. Ponemos a un ratón al comienzo de este laberinto. ¿Cuál es la probabilidad de que acabe en la parte A? ¿Y en la B? Simula este experimento y da una respuesta aproximada. Con la ayuda de un diagrama en árbol calcula las probabilidades de llega a A y a B.



8. Al lanzar tres monedas, Maria gana 1 euro si se obtiene 0 o 1 caras. Juan gana un euro si se obtienen 2 o 3 caras. María dice que el juego es justo porque solo hay 4 posibilidades y cada uno de ellos tiene ventajas con dos. Juan no está de acuerdo.
a) ¿Quién tiene razón? b) ¿Cuál sería la cantidad de dinero que tiene que pagar Maria a Juan en caso que este gane, para que el juego sea equitativo?

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 591-619)). Madrid: Síntesis.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. *J.* (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números,* 37, 37-55.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO, 14*, 99-114.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 2-16 years. In D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). Universidad de Sheffield.

Pérez, P. (1995). Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria. *UNO,* 5, 113-122.

Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

VI.

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Vicenç Font

Índice

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

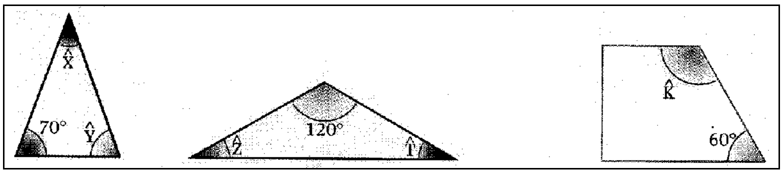
1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Enuncia otros dos problemas del mismo tipo cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil que el dado.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados[1]

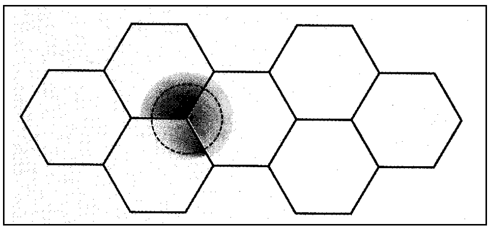
1. Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

2. Dos de los ángulos de un triángulo miden A = 64º 30' y B = 37º 30'. ¿Cuál es el valor del tercer ángulo, C?

3. Calcula la medida de los ángulos que se desconocen en estos polígonos



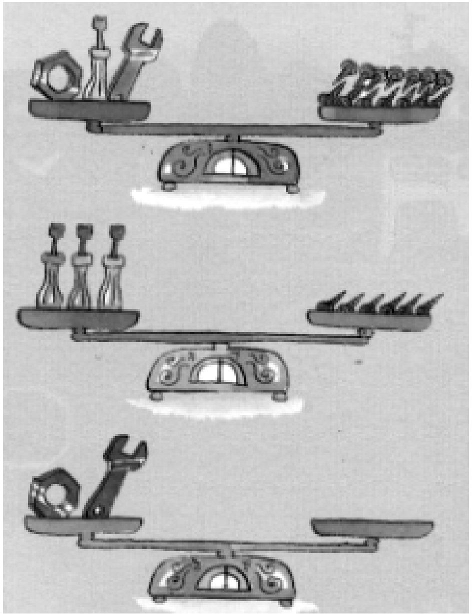
4. Observa el mosaico y calcula, sin usar el transportador, la medida del ángulo del hexágono regular.



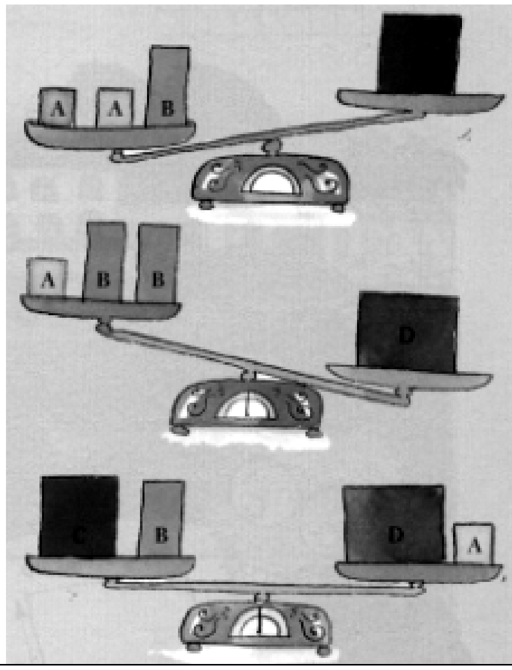
[1] Ferrero y cols (1999). *Matemáticas 6º*. Madrid: Anaya.

5.

¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada



¿Hacia qué lado se inclinará la tercera balanza?



6. Dibuja un cuadrado y un rectángulo que tengan igual perímetro y distinta área.

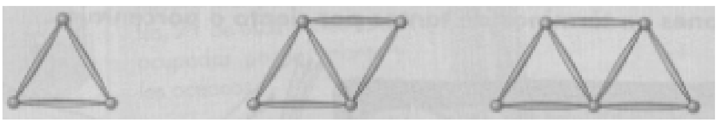
7. Dibuja un triángulo rectángulo que tenga 4 cm de base y 2'5 cm de altura. Mide y calcula su área y su perímetro.

8. La rueda de la bici de Maite mide 60 cm de diámetro. ¿Qué longitud avanza la bici por cada vuelta que da la rueda?

9. Copia y completa la tabla en tu cuaderno

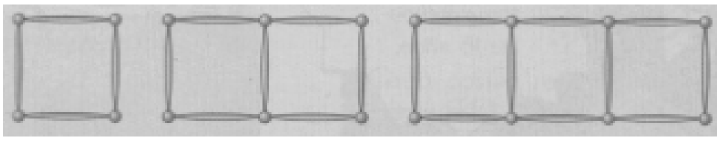
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cuadrado	1	4	9									
Cubo	1	8										

10. Copia las tablas y complétalas en cada caso
a)



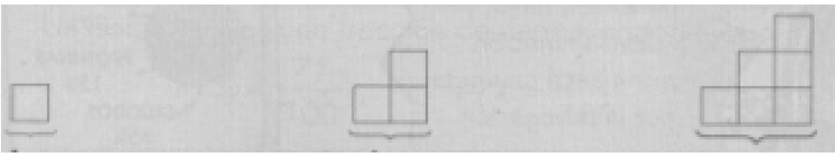
Nº de triángulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de palillos										
Nº de bolas										

b)



Nº de cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de palillos										
Nº de bolas										

c)



1 columna   2 columnas   3 columnas

Nº de columnas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cuadrados										

11. Realiza estas sumas y compara los resultados:

24.386 + 6.035   6.0345 + 24.386

24.386 + 6.035 + 715   6.035 + 715 + 24386

12. Calcula el término que falta.

... - 4.624 = 7.500   2.700 - ... = 925   .... - 4.686 = 5.000

6.000 - ... = 5.690   ... - 175 = 8.060   3.815 - ... = 2.018

1.500 - 925 = ...   5.000 - 4.200 =   10.000 - 5.275 = ...

B: Conocimientos Matemáticos

1. ¿ÁLGEBRA EN EDUCACIÓN PRIMARIA?

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar.

Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). En el "álgebra escolar" se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

El concepto de función es una de las principales ideas de las matemáticas. Por ello se considera que es necesario, y posible, iniciar su utilización y estudio en el tercer ciclo de primaria, formando parte de la nueva visión del razonamiento algebraico, en lugar de retrasarla a los niveles de secundaria. Pero el estudio de las funciones deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones. Se debe descartar el énfasis en notaciones, terminologías como rango y dominio, y graficaciones sin ningún propósito.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central.

En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. Esto nos ha llevado a tenerlo en cuenta en la formación de los maestros y a reflexionar sobre las razones de esta elección, así como sobre la orientación y justificación de dicho *Estándar* del NCTM.

Como hemos visto en los problemas incluidos en la sección A de Contextualización Profesional, en los libros de texto usados en primaria se proponen actividades que podemos calificar de algebraicas (uso de símbolos para designar objetos, ecuaciones, fórmulas y patrones). Incluso encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas.

Ejemplo

Presentamos a continuación algunas propiedades[2] algebraicas presentadas en los libros de texto, donde podemos también notar el uso de símbolos:

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa El orden de los sumandos no altera la suma	Propiedad asociativa Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo	M - S = D S + D = M M - D = S
En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo	

Propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación

Propiedad conmutativa En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado	**Propiedad asociativa** Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero

Propiedad distributiva

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número	El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los productos de cada término por ese número

La división inexacta. Prueba de la división

Una división es inexacta cuando su resto es distinto de cero.

$$\mathbf{r} \neq 0$$

Para saber si una división está bien hecha, multiplicamos el divisor por el cociente y le sumamos el resto. El resultado debe ser el dividendo.

$$\mathbf{D = d \times c + r}$$

Otro factor a tener en cuenta es que la introducción de la informática en primaria conlleva que, en determinadas actividades, los alumnos comienzan a utilizar un lenguaje que podemos calificar de casi "algébrico".

Ejemplo

Si proponemos en 6º de primaria la construcción de la siguiente hoja de cálculo con EXCEL para resolver un problema por tanteo, los alumnos pueden utilizar expresiones que contienen números, operaciones y símbolos:

Actividad: Queremos resolver el siguiente problema por tanteo:

Las edades de tres hermanos, Juan, Alberto y Ana suman 72 años. Sabemos que Juan, el mayor, tiene el triple de edad que Ana, la más pequeña, y que la edad de Alberto es el doble que la de Ana. ¿Cuáles son las edades de los tres hermanos?

Para ello confeccionaremos una hoja de cálculo con el programa EXCEL a partir de las siguientes instrucciones:

[2] Ferrero y cols (1999*). Matemáticas 5.*Madrid: Anaya.

- Escribe el título y los nombres de los hermanos tal como se ven en la figura.
- Introduce en la celda A6 "Suma actual", en la A8 "Suma de edades correcta" y en la celda D8 el número 72.
- Introduce en la celda B4 un valor cualquiera, por ejemplo 9.
- Introduce en la celda C4 la fórmula =2*B4.
- Introduce en la celda D4 la fórmula = B4*3.
- Introduce en la celda D6 la fórmula = B4+C4+D4

	A	B	C	D
1	Problema de las edades			
2				
3		Ana	Alberto	Juan
4		9	18	27
5				
6	Suma actual			54
7				
8	Suma de las edades correcta			72

- Varia el valor de la celda B4 para que la "Suma actual" sea 72.

¿Cuáles son las edades de los tres hermanos?

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y por tanto deben conocer los maestros en formación, son:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Con relación a la segunda característica, hay que destacar que entre los símbolos que usamos para expresar las generalizaciones de patrones y relaciones sobresalen los que permiten representar variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones. Con relación a la tercera característica, hay que destacar que las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían o cambian, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

Respecto a la cuarta característica, hay que destacar que todas las representaciones de una función dada son simplemente maneras diferentes de expresar la misma idea. Aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

2. EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Una visión tradicional y limitada del álgebra escolar (que se ha denominado "aritmética generalizada") es considerarla simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados: En esta visión los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas son diferencias en cuanto a la generalidad de las afirmaciones que se hacen:

- La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales,

  $20;\quad -7;\quad 14/5;\quad 4{,}75;\quad \sqrt{3}$

  o mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

  $45\cdot 12,\qquad \frac{73+5{,}4}{3},\qquad (13-7{,}4)^3$

- El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como x, y, t, v, o bien expresiones con variables:

  $3x - 5,\quad x^2 - x + 5,\quad (x+5)(x-7),\quad 3uv + 4v + u + v + 1,$

Este "tipo de álgebra" está presente desde los primeros niveles educativos, como hemos visto en los ejemplos tomados de los libros de primaria. Siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas resultan de gran utilidad.

Es necesario, sin embargo, que los profesores tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas.

Ejemplo

En el estudio de los números enteros hemos descrito algunas características del álgebra que complementan las que describimos en esta sección. Así, una expresión como $(13 - 7\cdot 4)^3$, aunque sólo contiene números, requiere la aplicación de reglas de uso de los paréntesis y prioridad de las operaciones, que es propia del razonamiento algebraico

Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son:

- El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.
- La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial lo constituye la actividad que se hace con estos instrumentos:

- Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta visión ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de grado. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización, y como hemos visto se pueden, y deben, iniciar desde la educación primaria.

La identificación y designación de las variables que caracterizan el sistema a modelizar es el primer paso de la modelización matemática, que vendrá seguido del establecimiento de relaciones entre dichas variables. A continuación viene el trabajo con el modelo, la manipulación formal de las expresiones simbólicas que muestra las propiedades del sistema modelizado y permite obtener nuevos conocimientos sobre el mismo. Finalmente se realizará la interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico.

3. DIFERENTES CLASES DE SIGNOS

Para representar una situación podemos utilizar diferentes tipos de signos. Por ejemplo, podemos utilizar gestos, dibujos o iconos que se parezcan a los objetos o a la situación que queremos representar, o bien palabras o símbolos convencionales que no tengan ningún parecido con el objeto representado. Una primera clasificación[3] de los signos es la siguiente: 1) *Icono*, se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa, 2) *Índice*, se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto (por ejemplo una señal de prohibido girar a la derecha) y 3) *Símbolo*, se trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención. No es

[3] Hay muchas investigaciones realizadas sobre los sistemas de signos que se utilizan en matemáticas. Estas investigaciones han matizado y desarrollado la clasificación anterior. Entre dichas investigaciones hay que destacar las que señalan la necesidad de introducir en la didáctica de las matemáticas el concepto de *función semiótica* que tienen su origen en los trabajos de semiótica de U. Eco. El uso de la noción de función semiótica en didáctica de las matemáticas puede verse en Godino (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22 (2/3).

fácil siempre ponerse de acuerdo cuándo un signo en matemáticas se corresponde con alguno de estos tres grupos, por lo que muchos autores prefieren hablar de representaciones o sistemas de signos en general. Nosotros, en los párrafos que siguen utilizaremos de manera indistinta "signo" o "símbolo" y hablaremos de "icono" sólo cuando la relación física con el objeto representado sea muy evidente.

La importancia de considerar el papel que juegan los diferentes tipos de representación en la comprensión de las matemáticas ha sido puesta de manifiesto por diferentes investigadores. Por ejemplo, según Bruner hay que considerar tres tipos de representaciones:

1) La representación enactiva: este tipo de representación permite representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada. Como ejemplo de representación enactiva tenemo*s* el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto con relación a la acción que se realiza sobre el mismo.

2) La representación icónica: este tipo de representación permite representar una situación por medio de dibujos, figuras o iconos que tengan algún tipo de parecido con aquello que se representa.

3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos.

Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases: "(..)Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar <<preparados>> para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas(..)"[4]

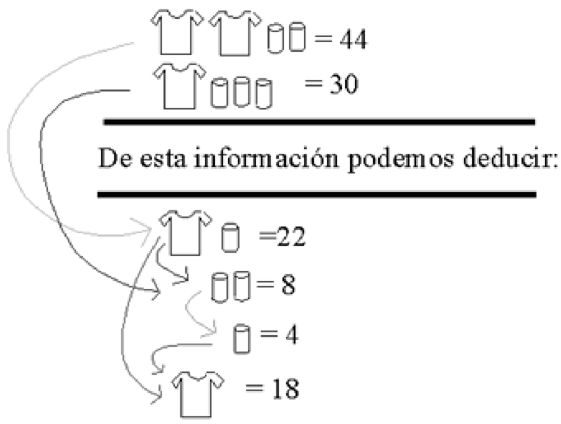
Independientemente de que las ideas de Bruner sean o no las más indicadas para enseñar los contenidos matemáticos, es evidente que el tipo de representación que utilicemos no es algo neutral o indiferente. Optar por un tipo de representación u otra tiene sus ventajas y sus inconvenientes. En el capítulo 1 de la monografía sobre *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros* ya comentamos que el lenguaje matemático tiene una doble función: 1) *representacional*: nos permite designar objetos y 2) *instrumental*: es una herramienta para hacer el trabajo matemático. Hay que ser muy conscientes de que el valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, iconos, gráficas, etc.

Veamos un ejemplo para ilustrar los diferentes tipos de sistemas de signos que podemos utilizar para realizar el mismo trabajo matemático.

Ejemplo

> El precio de dos camisetas y de dos latas de refresco es de 44 euros. El precio de una camiseta y tres latas es de 30 euros. ¿Cuál es el precio de una camiseta y el de una lata de refresco?

[4] Resnick, L. B. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós-MEC. (p. 141).



Con esta representación se quiere representar el siguiente razonamiento:

Si dos camisetas y dos latas valen 44 euros, una camiseta y una lata valen la mitad: 22 euros. Si una camiseta y tres latas valen 30 euros, y una camiseta y una lata valen 22 euros, dos latas valen 8 euros, una sola lata vale la mitad (4 euros) y, por tanto, la camiseta vale 18 euros (22-4).

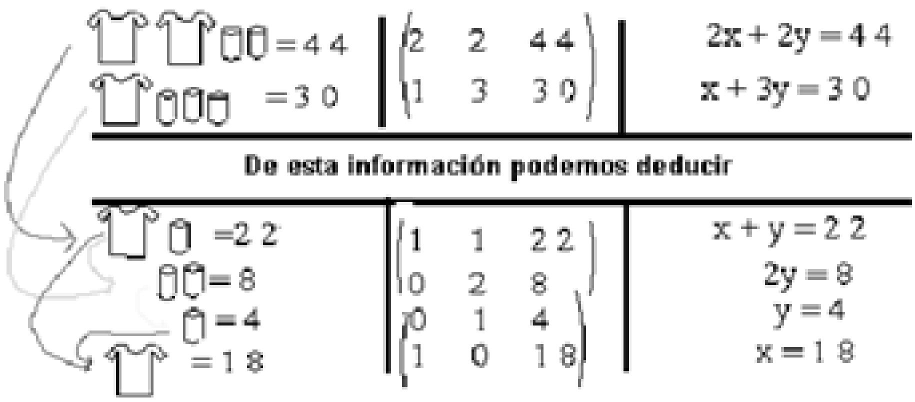
Con este tipo de representación hemos podido hallar el precio de la camiseta y el de las latas sin usar las ecuaciones. Ahora bien, este tipo de representación es uno de los muchos que podemos utilizar para resolver este problema.

1. A continuación tienes el proceso de resolución del problema anterior utilizando tres tipos de representaciones diferentes.

a) Asocia cada representación con uno de los siguientes niveles educativos: 2º ciclo de la ESO, Bachillerato y ciclo superior de primaria

b) Indica cuál utiliza iconos y cuál utiliza sólo símbolos. Especifica los iconos y los símbolos utilizados en cada caso.

c) ¿Qué inconvenientes y qué ventajas encuentras en el uso de representaciones icónicas?



La utilización de representaciones icónicas permite introducir en la educación primaria un tipo de razonamiento que se puede calificar de algebraico, pre-algebraico o casi-algebraico, y que no sería posible realizar en el caso de haber optado por una representación completamente simbólica como, por ejemplo, las ecuaciones.

2. a) Resuelve la actividad siguiente.

b) ¿Crees que esta actividad es adecuada para el último ciclo de primaria?

c) ¿En el apartado de Contextualización Profesional hay algún ejercicio parecido a éste?

d) Si en lugar de latas de espárragos fuesen latas de judías, ¿cuál habría sido el resultado?

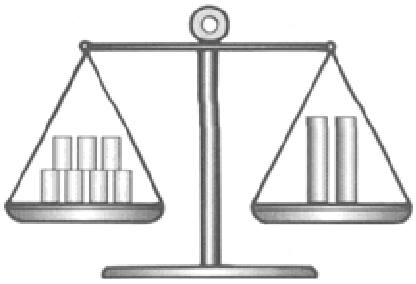
e) Si las barras hubiesen sido de plomo en lugar de hierro, ¿cuál habría sido el resultado?

d) Intenta resolver esta actividad utilizando sólo ecuaciones.

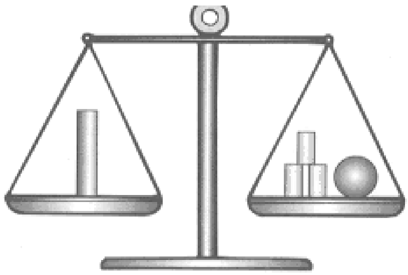
e) ¿Qué inconvenientes y que ventajas encuentras en el uso de representaciones icónicas en este caso?

Actividad: Las figuras siguientes representan dos platos de una balanza en equilibrio. En el de la izquierda hay latas de espárragos y en el de la derecha hay barras de hierro.

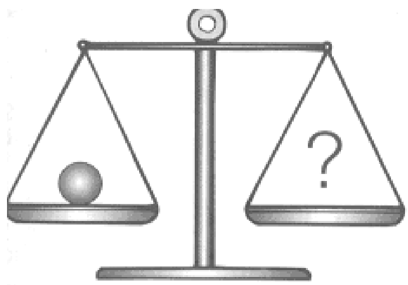
a) 7 latas de espárragos tienen la misma masa que........ ....barras de hierro.



b) ...... barras de hierro tienen la misma masa que una bola de hierro y .... latas de espárrago.



c) Una bola de hierro tiene la misma masa que.......................



4. LOS SÍMBOLOS COMO REPRESENTACIONES DE OBJETOS Y LOS SÍMBOLOS COMO OBJETOS

En la educación primaria los alumnos manipulan expresiones con letras, operaciones y números. Por ejemplo, para buscar el perímetro de un rectángulo, el área de un triángulo, la longitud de una circunferencia, etc. tienen que utilizar las expresiones siguientes:

$$P = 2a+2b, \quad A = \frac{a \cdot b}{2}, L = 2\pi r$$

En la secundaria el uso de las expresiones algebraicas (expresiones con letras, operaciones y números) aumenta considerablemente y los alumnos pasan a utilizar, entre otras, identidades notables (por ejemplo el cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), ecuaciones (por ejemplo, $3x+2=5$) y polinomios (por ejemplo, $2x^3 + 3x + 7$).

El camino que va desde la manipulación, por ejemplo, de fórmulas geométricas para hallar longitudes y áreas en el último ciclo de primaria hasta el cálculo, por ejemplo, de la suma y el producto de polinomios en el segundo ciclo de la ESO, es un camino largo, complejo y lleno de dificultades. En este camino conviene distinguir dos etapas.

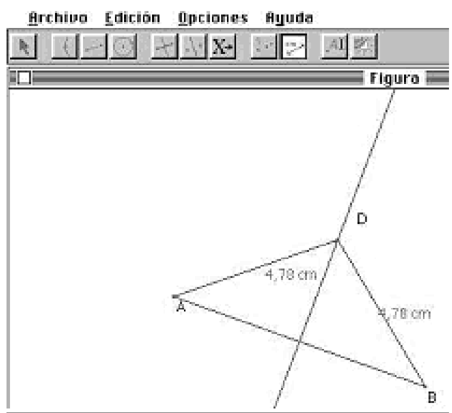
1) En la primera los símbolos substituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación que representan.

2) En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan.

Veamos un ejemplo que puede servir para ilustrar estas dos etapas.

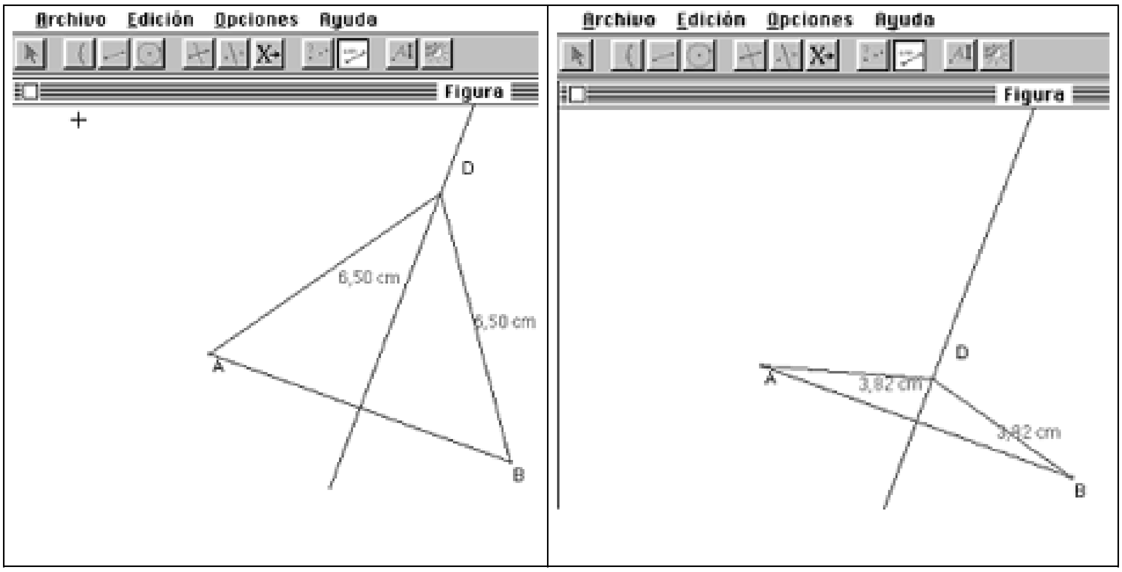
Ejemplo

> En 6º de primaria los alumnos ya han trabajado en clase los siguientes contenidos: recta, segmento, punto medio de un segmento, recta perpendicular por un punto, etc. Supongamos que saben que la mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y queremos que los alumnos entiendan la mediatriz como la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento. Para conseguirlo se les puede proponer realizar la siguiente construcción con el programa Cabri:



.

Una vez realizada con el ordenador la construcción anterior, el punto *D* se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto *D* y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto *D* es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos *A* y *B* del segmento. Por lo tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos.



Este resultado se puede simbolizar de la siguiente manera: los puntos de la mediatriz cumplen la siguiente condición: distancia *AD* = distancia *DB* y si representamos por *y* la distancia *AD* y por *x* la distancia *DB* los alumnos pueden llegar a simbolizar la condición anterior de la siguiente manera: y = *x*

Para un alumno de primaria que, después de realizar la construcción anterior, llega a esta conclusión, la *y* es el símbolo que representa la distancia del punto a un extremo del segmento y la *x* es el símbolo que representa la distancia al otro extremo. Los símbolos están en lugar de los segmentos y los valores de estos símbolos son las longitudes de los diferentes segmentos que se forman al mover el punto *D*, por lo cual no tienen ningún sentido considerar que los valores de *x* e *y* sean negativos.

Las consideraciones anteriores corresponden a la primera etapa, pero si prescindimos de la situación que hemos representado anteriormente podemos considerar que *x* e *y* pueden tomar valores cualesquiera (siempre que sean iguales), incluso valores negativos. Esta ampliación del rango de valores de los símbolos permite utilizarlos para representar otras situaciones además de la que hemos considerado inicialmente.

Esta ampliación del rango de valores de los símbolos nos permite considerar nuevos objetos: la variable *x*, la variable *y,* y la función que relaciona estas dos variables $y = x$. Sobre estos objetos podemos realizar acciones como por ejemplo $y\text{-}x = 0$ o $\frac{y}{x} = 1$ que aún pueden tener algún significado en la situación inicial o bien acciones que ya no tienen ningún significado en la situación inicial, como por ejemplo considerar $y = x+x$.

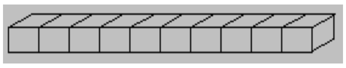
3. Considera la siguiente secuencia de actividades

a) ¿Crees que las características de esta secuencia de actividades se corresponden con las que hemos atribuido a la primera etapa?

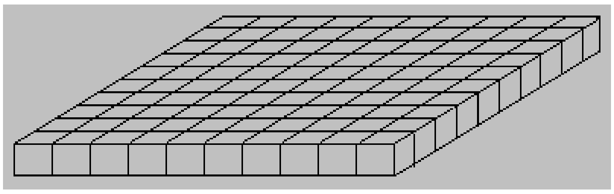
b) ¿Qué problemas tendríamos si quisiéramos introducir la expresión x^4?

1) Tenemos un cubo pequeño que mide 1 cm de lado. Su volumen es ....cm^3.

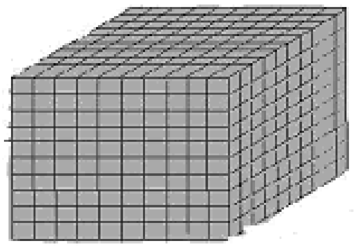
Con 10 cubos pequeños juntos tenemos una barra. Su volumen es ...cm^3.



Si juntamos 10 barras tenemos una placa. Su volumen es ...cm^3.



Si apilamos 10 placas obtenemos un bloque (cubo grande). Su volumen es ....cm^3.



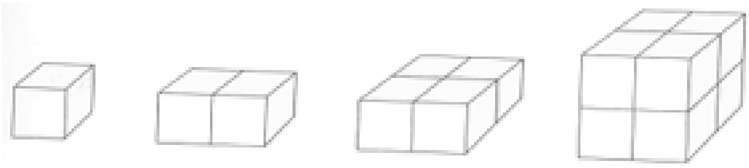
2). ¿Cuál es el volumen de todas estas piezas juntas: 2 bloques, 1 placa, 6 barras y 4 cubos pequeños. Completa la respuesta:

$$\text{Volumen} = 2\cdot 10^3 \text{ cm}^3 + 1\cdot\text{... cm}^3 + \text{...}\cdot\text{... cm}^3 + \text{......} = \text{...... cm}^3$$

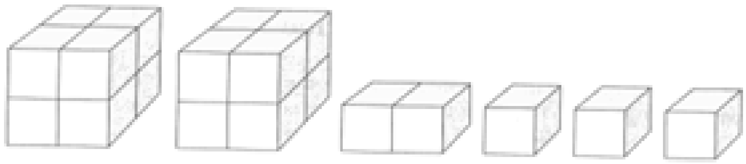
3). ¿Qué volumen ocupan un bloque, tres placas, dos barras y tres cubos pequeños?

4). Dibuja cubos, barras, placas y bloques de tal forma que todos juntos ocupen un volumen de 3206 cm^3.

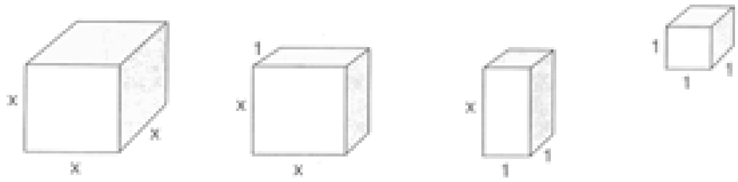
5). a) Si la barra sólo estuviese formada por dos cubos pequeños, la placa por dos barras y el cubo por dos placas, ¿cuál sería el volumen de una barra? ¿Y el de una placa?¿Y el del bloque?



b) Con este tipo de piezas, ¿qué volumen ocupan tres cubos pequeños, una barra y dos bloques?



6. Si la barra estuviese formada por x cubos pequeños, la placa por x barras y el cubo grande por x placas, ¿cuál sería el volumen de la barra? ¿Y el volumen de la placa? ¿Y el volumen del cubo?



a) Con este tipo de piezas, ¿qué volumen ocupan tres cubos pequeños, una barra y dos bloques?

b) Dibuja el volumen $(3x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$ cm^3

Los diferentes psicólogos que han considerado los procesos de simbolización, abstracción y generalización coinciden en que el primer nivel que hemos descrito anteriormente puede ser apropiado para muchos de los alumnos de primaria. Con relación al segundo nivel las opiniones no son coincidentes, aunque la opinión mayoritaria es que no es adecuada para los alumnos de primaria. Entre estas últimas opiniones destaca la de Piaget que considera que las características del segundo nivel descritas anteriormente corresponden a la etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años aproximadamente).

5. LAS VARIABLES Y SUS USOS

Una *variable* es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos.

Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.

Ejemplo

Analicemos las frases:

a) Para cualquier par de números naturales a y b, siempre se verifica que, $a + b = b + a$.

b) 2+3 = 3+2.

La segunda es diferente de la primera, ya que la segunda sólo sirve para estos dos números, mientras que la primera sirve para cualquier par de números. De la segunda igualdad se puede llegar a pensar que es propia sólo de los números 2 y 3. Incluso aunque se afirmara que esa segunda igualdad es cierta para muchos ejemplos de pares de números, tampoco se estaría haciendo la misma afirmación que en la primera igualdad.

Una manera alternativa de enunciar esa propiedad de los números es mediante una frase del tipo, "La suma de dos números naturales es independiente del orden de los términos de esta suma". Esta segunda alternativa presenta ventajas e inconvenientes con respecto a la primera. Uno de los inconvenientes es que resulta más larga que la primera.

Encontramos cuatro usos principales de las variables en matemáticas:

- *Las variables como incógnitas*: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La *incógnita* interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.

  Ejemplos:

  Cuando en los primeros cursos se escribe, por ejemplo, 9+ __ = 15

  Cuando en cursos más avanzados se proponen ejercicios del tipo: ¿Cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $4x + 2 = 3x + 5$?

- *Las variables como indeterminadas* o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números (o elementos del conjunto que se trate).

  Ejemplos:

  Para todos los números reales se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$

  El área del cualquier rectángulo es $A = b \cdot a$ (a = base y b = altura).

- *Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente*. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.

  Ejemplos:

  En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.

  En la fórmula $C = 2\pi r$, cuando cambia el radio r también cambia la longitud de la circunferencia C.

- *Las variables como constantes o parámetros.* Es el caso de la letra a en la fórmula de la función de proporcionalidad $y = ax$. En un primer momento se ha de considerar que la letra a no varia y que sólo lo hacen de manera conjunta la x y la y. De esta manera se obtiene una función de proporcionalidad concreta. En este primer momento no hay diferencia entre tener $y = ax$ o $y = 2x$. En un segundo momento se ha de considerar que a puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad

  Ejemplo:

  "a es una constante entera y x una incógnita tal que, $ax = x+1$. ¿Qué puede valer x?"

  Aquí se considera que la letra representa un número fijado como dato en el problema, pudiendo ser cualquier número entero, pero cuyo valor no se fija en el problema dado. Esta manera de trabajar confiere al problema un carácter mucho más general. La letra a interviene aquí como un *parámetro*: objeto matemático conocido (número, conjunto, función, figura, etc.) que se manipula como si fuera desconocido y además puede tomar cualquier valor.

6. DIFERENTES TIPOS DE IGUALDADES EN MATEMÁTICAS

El signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo[5].

Ejemplo

Cuando escribimos 2+3=1+4 queremos decir que 2+3 y 1+4 son dos formas diferentes de escribir el mismo número 5.

Según la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad numérica se obtienen diferentes tipos de igualdades:

- Si en la igualdad aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables, se dice que se trata de una *identidad*: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

  Las identidades notables son utilizadas de manera intuitiva por los niños desde una edad muy temprana. Por ejemplo, los alumnos de educación infantil mejoran mucho su capacidad de cálculo mental cuando descubren la propiedad conmutativa $a+b=b+a$. Ante la pregunta, ¿cuántos son 2+9?. La capacidad de utilizar que 2+9 es igual a 9+2 permite hallar más fácilmente la respuesta correcta, ya que es mucho más fácil contar dos a partir del nueve, que no contar nueve a partir del dos.

- Si la igualdad es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se dice que se trata de una *ecuación*: $a+3 =7$.

  Muchos de los problemas que han de resolver los alumnos de primaria consisten en hallar un número desconocido que cumpla ciertas condiciones. La formulación de esta pregunta suele ser en forma de enunciado, pero también se utiliza un lenguaje simbólico del tipo: $7 + \square = 20$.

- La igualdad se usa también para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, hablándose en este caso de una *fórmula*: $e = 1/2gt^2$.

Los alumnos de primaria se encuentran que, en muchos casos, la relación entre dos magnitudes viene dada mediante una fórmula. Por ejemplo, el área de un cuadrado se puede calcular a partir de la fórmula: Área = l^2 , donde l es la longitud del lado del cuadrado. A partir de esta fórmula el alumno puede calcular el área de cualquier cuadrado conociendo la longitud del lado. Para ello ha de interpretar la fórmula de la manera siguiente:

- Ha de saber lo que se considera dato en la fórmula (en este caso la longitud del lado del cuadrado).
- Tiene que entender cómo se combinan los datos entre ellos (en este caso el dato inicial se multiplica por sí mismo).

Con esta interpretación de la fórmula, el alumno que sabe que el lado del cuadrado mide 4 cm puede realizar los cálculos indicados en la fórmula (multiplicar 4 cm por 4 cm) y, por último, determinar que el resultado (16 cm^2) es el área del cuadrado.

[5] Maurin, C. y Johsua, A. (1993). Les structures numériques à l'école primaire. Paris: Ellipses. (p. 90).

7. ECUACIONES E INECUACIONES DE UNA INCÓGNITA

A continuación se recuerdan brevemente los contenidos sobre ecuaciones e inecuaciones con una incógnita que ya se conocen de la secundaria. Seguidamente se propone un nuevo punto de vista sobre estos dos objetos matemáticos.

7.1. Las ecuaciones e inecuaciones en secundaria

En la secundaria se suelen definir las *ecuaciones de primer grado con una incógnita* como una igualdad en la que hay un número desconocido, normalmente representado por la letra x, llamada incógnita, que no está elevado al cuadrado, ni al cubo, etc. Por ejemplo: $2x+6 = 8$. Una expresión del tipo $2x^2+6 = 8$ no es una ecuación de primer grado con una incógnita porque la incógnita está elevada al cuadrado, mientras que una expresión del tipo $2x+6+y = 8$ tampoco lo es porque hay dos incógnitas: la x y la y.

En la ecuación $2x + 6 = 8$ la igualdad es verdadera para un determinado valor de la incógnita: $x = 1$

$$2\,(1) + 6 = 8$$

A este valor se le llama *solución* de la ecuación. Si substituimos la x por un número que no es solución, no se cumple la igualdad. Por ejemplo, si substituimos x por 2, tenemos:

$$2\,(2) + 6 \neq 8$$

La solución de la ecuación $2x+6 = 8$ es $x = 1$ y la solución de la ecuación $x+3 = 4$ también es $x = 1$. En este caso se dice que las ecuaciones $2x+6 = 8$ y $x+3 = 4$ son *equivalentes*. Las ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Hay transformaciones que permiten obtener ecuaciones equivalentes:

- La ecuación inicial y la que resulta de sumar o restar el mismo número en los dos miembros de la igualdad son equivalentes.
- La ecuación inicial y la que resulta de multiplicar o dividir por el mismo número (diferente de cero) los dos miembros de la igualdad son equivalentes.

Resolver una ecuación con una incógnita consiste en hallar la solución. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se hacen las transformaciones que sean necesarias hasta llegar a una ecuación equivalente del tipo $ax = b$. Para conseguirlo, se trasponen todos los términos que tienen incógnita a un lado de la igualdad y todos los que no la tienen al otro; después se efectúan las operaciones indicadas hasta llegar a una ecuación del tipo $ax = b$, que se resuelve despejando la incógnita.

Ejemplo:

Ecuación inicial: $4x - 13 + 2x = 3x - 4$

Trasponemos, con el signo cambiado, los términos que tienen x a un lado y los que no tienen al otro: $4x + 2x - 3x = -4 + 13$

Efectuamos las operaciones indicadas: $3x = 9$

Despejamos a incógnita: $x = 9/3$

La solución es: $x = 3$

Generalmente, una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo, $5x - 4 = 5x$ es una ecuación sin solución, porque es imposible que, restando cuatro a un número, obtengamos este mismo número.

Por otra parte hay ecuaciones como, por ejemplo, $5x + 7 - 3 = 5x + 4$ que tienen infinitas soluciones porque la igualdad se cumple para cualquier valor de la incógnita. Si en el primer miembro substituimos 7 - 3 por 4, la ecuación anterior se convierte en: $5x + 4 = 5x + 4$. Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x porque en realidad lo que afirma esta igualdad es que un número $(5x + 4)$ es igual a él mismo y esto se cumple siempre.

4 ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?
a) $x = 1$ es solución de la ecuación $5x - 3 = 3x + 1$
b) $x = 2$ es solución de la ecuación $5x - 3 = 3x + 1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $5x - 25 = x - 9$ b) $4x - 2 + 3x = 40$ c) $5x + 6 = 2x + 12$ d) $-7 - 6x - 1 = -4x + 10 - x$
e) $2x - 6 - 8x + 12 = 5 - 4x + 17 - 2 + x$ f) $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$
g) $3(8 - 2x) + 5 = 17 - 2(1 - x)$ h) $\frac{5x-50}{2} = 17 - x$ i) $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{6} = 37$

Hay muchas situaciones en las que en lugar del signo = (igual) se han de utilizar los siguientes signos: ≥ (mayor o igual), > (mayor), ≤ (menor o igual) y < (menor).

Ejemplo

> Un vendedor de artículos de limpieza cobra 600 euros cada mes y un 5% del total de las ventas mensuales. ¿Qué volumen de ventas ha de tener para ganar más de 1.100 euros?

En general, la resolución de un problema relacionado con una igualdad nos lleva a una ecuación. En cambio, si el enunciado está relacionado con una desigualdad tendremos una *inecuación*.

Cuando a los dos miembros de una desigualdad, por ejemplo: $-3 < 4$ le sumamos un mismo número positivo, por ejemplo el 5: $-3 + 5 < 4 + 5$ obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $2 < 9$. Esta propiedad también se cumple si el número que sumamos es negativo, por ejemplo si sumamos el -2: $-3 - 2 < 4 - 2$, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $-5 < 2$

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una desigualdad por el mismo número (diferente de cero) y éste es positivo, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido (la desigualdad se conserva). Si es negativo, obtenemos otra desigualdad de sentido contrario (la desigualdad cambia de sentido).

Consideremos la desigualdad: $-3 < 4$. A los dos miembros de esta desigualdad los multiplicamos por un mismo número positivo, por ejemplo el 2: $-3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$. Obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $-6 < 8$. Si los dividimos por –2, por ejemplo, obtenemos –1,5 en el primer miembro y –2 en el segundo. En este caso $-1{,}5 > -2$.

La resolución de inecuaciones funciona como la resolución de ecuaciones excepto cuando hemos de multiplicar o dividir por un número negativo. En estos casos hemos de cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplo

Queremos resolver la inecuación: $7x-15 < 5x-19$

Trasponemos, como en el caso de una ecuación los términos con x a un lado de la desigualdad y los números a la otra: $7x - 5x < -19 + 15$

Operando los términos de cada lado de la desigualdad: $2x < -4$

Despejamos la incógnita dividiendo por 2 los dos términos de la inecuación (la desigualdad no cambia de sentido): $x < -4/2$

Y, por tanto: $x < -2$.

Las soluciones de esta inecuación son todos los números menores que –2, que podemos representar sobre la recta numérica de la manera siguiente:

6. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente sus soluciones:
a) $2x - 14 > 4$ b) $-2x + 8 < 10$ c) $2(x - 3) > 5$

d) $3 - 2x \quad 17$ e) $\dfrac{5x-50}{2} \geq 17 - x$

En la enseñanza secundaria también se estudian ecuaciones de segundo grado. Son aquellas en las que la incógnita está elevada al cuadrado. Por ejemplo, $x^2 + 3x - 10 = 0$. Una ecuación de segundo grado sólo pueda tener dos soluciones, una solución o ninguna.

7.2. Proposiciones y funciones proposicionales

Una *proposición* es un enunciado declarativo del que se puede afirmar que es verdadero o falso. En la vida diaria y en matemáticas tratamos con proposiciones constantemente.

Ejemplos

a) La capital de España es Sevilla

b) $4 \cdot 8 = 32$

c) $3x + 1 = 10$

En el ejemplo anterior, los dos primeros enunciados son proposiciones. El primero de ellos es falso, el segundo es verdadero. El tercer enunciado no es una proposición, ya que no se puede afirmar que sea verdadero o falso. Se podría, sin embargo, convertir en una proposición si sustituimos la letra x por un número particular:

Ejemplos

$3 \cdot 3 + 1 = 10$, es una proposición verdadera;

$3 \cdot (-2) + 1 = 10$, es una proposición falsa.

Algunas definiciones

- Llamamos *variable* a la letra x en el enunciado c) y *función proposicional* (o sentencia abierta) a la proposición completa.

- Cada uno de los valores que puede tomar la variable x para hacer verdadera la proposición c) es una *solución* de dicha sentencia abierta.
- *Conjunto de sustitución* de la función proposicional es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable en ella.
- *Conjunto de validez* (o *conjunto solución*) de una función proposicional son aquellos valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera.
- *Resolver* dicha función proposicional es encontrar su conjunto solución.
- Cuando la sentencia incluye el signo = se llama *ecuación*, y si incluye alguno de los símbolos, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, se llama *inecuación*.

Ejemplo

La función proposicional $x^2 = 9$ es una ecuación y tiene solución en R (números reales). Su conjunto solución es $\{+3, -3\}$

La letra x usada en el ejemplo es la variable de la función proposicional correspondiente (sentencia abierta), cuya solución se expresa como un conjunto.

En el contexto escolar habitual, y con un punto de vista más restringido, se suele considerar la letra x de las ecuaciones e inecuaciones como incógnitas, esto es, como valores particulares desconocidos. En este punto de vista, la búsqueda de las soluciones de, por ejemplo, $x^2 = 9$, consiste en encontrar números desconocidos que sustituidos en la ecuación cumplan la igualdad.

Dos funciones proposicionales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo

$4x - 12 = 16$, y $4x = 4$ tienen las mismas soluciones. La segunda ecuación se ha obtenido a partir de la primera aplicándole una transformación consistente en restar 12 a ambos miembros de la ecuación.

Las inecuaciones son un tipo especial de sentencias abiertas, de manera que la definición de equivalencia dada anteriormente es también aplicable: Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución

7 ¿Tienen soluciones en R las siguientes funciones proposicionales? $2x + 7 = 3$; $x < 5$? ¿Cuáles son sus conjuntos solución? ¿Son ecuaciones o inecuaciones?

8. ¿Tiene soluciones reales (conjunto de sustitución R) la función proposicional, $x^2 = -1$? ¿Es una ecuación o inecuación?

8. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

Una técnica potente para modelizar y resolver algebraicamente los problemas verbales es el uso de letras para expresar cantidades desconocidas variables que pueden tomar un conjunto de valores posibles dentro de ciertos intervalos (funciones proposicionales con un determinado conjunto de validez). Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde el comienzo de la enseñanza secundaria, es dominar dicha técnica.

Aunque la modelización algebraica no es algorítmica (no existe una máquina que resuelva automáticamente los problemas verbales), sin embargo, se pueden dar los siguientes consejos o heurísticas que pueden ayudar en dicho proceso:

1. Determinar lo que se pide hallar en el enunciado e introducir una variable para representar la cantidad desconocida. Algunas palabras claves como, qué, cuántos, y encontrar, señalan la cantidad desconocida.
2. Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.
3. Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.
4. Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.
5. Resolver la ecuación o inecuación usando las técnicas formales disponibles.
6. Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.
7. Evaluar la solución ¿Has encontrado lo que se pedía? ¿Tiene sentido la respuesta? Por ejemplo, si el problema era encontrar el área de un rectángulo, la respuesta -4 sería absurdo.

Ejemplo:

Pedro vive a 180 km de su lugar de trabajo. Prevé salir de casa a las 9 horas y conducir a la velocidad de 50 km/hora. ¿A qué hora llegará al trabajo?

Solución:

1. Sea t = el tiempo que tiene que conducir (expresado en horas)
2. Distancia (km) = velocidad (km/h) . tiempo (horas)
3. Por una parte, distancia = $50 \cdot t$; y por otra, distancia = 180 km.
4. $50t = 180$ (modelo algebraico del problema)

$t = 180/50 = 3{,}6$

5. Pedro tiene que conducir 3,6 horas. Como sale a las 9 horas y conduce durante 3,6 horas, esto es, 3 horas y 36 minutos, llegará al trabajo a las 12h 36 m.

Este problema verbal muestra una característica importante de la modelización matemática. El problema real se ha simplificado para que se pueda aplicar la función que caracteriza el movimiento uniforme de una partícula: $e = vt$ (espacio es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo). También vemos las posibilidades de generalización que proporciona la modelización algebraica: la velocidad y la distancia a recorrer son datos del problema que intervienen como "parámetros" que pueden tomar otros valores. Ahora bien, sean los que sean los valores de estos parámetros, el tiempo se calcula de igual modo.

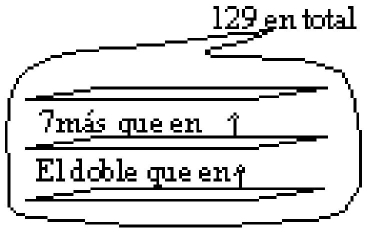
En algunos problemas puede ser muy útil hacer un dibujo o esquema de la situación.

Ejemplo,

Si tenemos que resolver el siguiente problema:

En 3 estantes de una librería hay 129 manuscritos. En el segundo hay 7 más que en el primero. En el tercero hay el doble que en el segundo.¿Cuántos manuscritos hay en cada estante?

Un dibujo como el siguiente nos puede ayudar en la resolución del problema:



9. Resuelve el problema del ejemplo anterior.

10. La temperatura de la tierra a unos pocos metros de la superficie permanece constante a unos 20ºC tanto en invierno como en verano. A medida que profundizamos la temperatura se incrementa de manera constante unos 10ºC por kilómetro. ¿A qué profundidad debe perforar una compañía geotérmica para alcanzar un punto cuya temperatura sea de 55ºC?

11. Un comerciante tiene dos tipos de vino que cuestan 72 céntimos y 40 céntimos un cuarto, respectivamente. ¿Qué cantidad debe tomar de cada tipo para obtener 50 cuartos de una mezcla de ambos vinos cuyo valor sea de 60 céntimos el cuarto?

12. En un concurso de televisión se quieren repartir en premios una cantidad inferior a 300 €. Los participantes van sumando puntos y por cada punto se obtiene una determinada cantidad de euros. Hay dos participantes y el segundo ha obtenido 20 puntos más que el primero. ¿Cuántos euros se pueden dar por cada punto conseguido?

9. ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Primero recordaremos brevemente algunos contenidos sobre ecuaciones con dos incógnitas que ya conoces de la secundaria. A continuación les aplicaremos el punto de vista de las funciones proposicionales.

9.1. Las ecuaciones con dos incógnitas en secundaria

Hasta este momento hemos considerado situaciones en las que se necesita utilizar una sola incógnita.¿Cómo podemos resolver situaciones en las que intervienen más de una incógnita?

13. Una empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Para fabricar una cartera utiliza 1 m^2 de piel y 3 m^2 para un maletín. En total dispone de 27 m^2 de piel. Utilizando toda la piel disponible contesta:
a) ¿Es posible producir 9 carteras y 6 maletines?
b) ¿Es posible producir 12 carteras y 5 maletines?
b) Busca otras posibilidades de producción.

La situación anterior admite varias respuestas. Por ejemplo, 9 carteras y 6 maletines o bien 12 carteras y 5 maletines, etc. La mejor manera de resolver esta actividad es planteando una ecuación:

x = n.º de carteras

y = n.º de maletines

$x + 3y = 27$

Esta última expresión es una *ecuación de primer grado con dos incógnitas*. En la secundaria se suele definir este tipo de ecuación como una igualdad en la que hay dos números desconocidos, normalmente representados por las letras x e y, que se llaman incógnitas, que no están elevadas al cuadrado, ni al cubo, etc.

Ejemplos:

- $6x+ 4y -156 = 0$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- $2x^2+6y = 8$, no lo es debido a que una incógnita está elevada al cuadrado.
- $2x+6 + y =8 - z$ tampoco lo es porque hay tres incógnitas: la x, la y y la z.

Observa que en la ecuación $x + 3y = 27$, la igualdad es verdadera para infinitos pares de valores. Por ejemplo, para $x = 9$ y $y = 6$ se cumple la igualdad:

$$9 + 3 \cdot 6 = 27$$

para $x=12$ y $y = 5$ también se cumple:

$$12 + 3 \cdot 5 = 27$$

para $x = 0$ y $y = 9$ también se cumple:

$$0 +3 \cdot 9 = 27$$

y así sucesivamente.

Cada par de valores, uno para la x y otro para la y, que cumplen la igualdad se llama solución de la ecuación. Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Ahora bien, puede ser que en el contexto del problema que ha originado la ecuación algunas de estas infinitas soluciones no tenga sentido. Por ejemplo, $x = 2,4$ y $y = 8,1$ es solución de la ecuación $x + 3y = 27$ pero no tiene sentido producir 2,4 carteras y 8,1 maletines

Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Tal como hemos visto para las ecuaciones de primer grado con una incógnita, los siguientes procedimientos permiten hallar ecuaciones equivalentes a otra dada previamente:

1) Sumar o restar a los dos miembros de una ecuación el mismo número.

2) Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número (diferente de cero).

14. Determina si son equivalentes el siguiente par de ecuaciones:

$5x - 3 = 3y + 1 \qquad 10x - 6 = 6y + 2$

Volvamos a considerar el ejemplo de las carteras y los maletines. La disponibilidad de piel no es el único elemento a tener en cuenta para producir carteras y maletines. Hay otros elementos que también son muy importantes, como por ejemplo el número de horas de trabajador que son necesarias.

15. Una empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Para fabricar una cartera utilizan 1 m^2 de piel y 3 m^2 para un maletín. Para fabricar una cartera necesitan dos horas de trabajador y 1 hora para fabricar un maletín. Sabiendo que la empresa dispone de 27 m^2 de piel y de un equipo humano capaz de trabajar 34 horas, completa la tabla siguiente hasta hallar una producción que agote tanto la disponibilidad de piel como la de mano de obra:

(Sugerencia: utilita el método de ensayo y error).

carteras	maletines	m^2 de piel	n.º horas
7	6	25	20
11	5	....	....
....	....	....	....
....	....	27	34

Si bien por el método de ensayo y error es posible hallar la solución de esta actividad, la mejor manera de resolverla es plantear dos ecuaciones:

x = n.º de carteras

y = n.º de maletines

$$x + 3y = 27$$

$$2x + y = 34$$

Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas consideradas conjuntamente forman un *sistema* y se suelen representar con una llave. En el caso del sistema anterior: $\begin{cases} x+3y=27 \\ 2x+y=34 \end{cases}$. La llave también se puede poner a la derecha. $\left.\begin{matrix} x+3y=27 \\ 2x+y=34 \end{matrix}\right\}$

Dado un sistema, como por ejemplo, $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{cases}$ tenemos que la primera ecuación $2x + 3y = 7$ tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, para $x = 2$ y $y = 1$ se cumple la igualdad: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$. Otras soluciones son: $x = -1$ y $y = 3$, $x = -2,5$ y $y = 4$, etc. De estas infinitas soluciones, la solución $x = 2$ y $y = 1$ también lo es de la segunda ecuación $x - 5y = -3$, porque $2 - 5 \cdot 1 = -3$. Mientras que las otras no lo son:

$x = -1$ y $y = 3$ no es solución porque $-1- 5 \cdot 3 \neq -3$

$x = -2,5$ y $y = 4$ no es solución porque $-2,5 - 5 \cdot 4 \neq -3$

De hecho, sólo la solución $x = 2$ y $y = 1$ es solución a la vez de las dos ecuaciones de este sistema.

16. Construye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tenga como solución $x = -4$ y $y = 0$.

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

Los siguientes sistemas son equivalentes puesto que $x = 2$ y $y = 1$ es la solución de los dos sistemas:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+6y=14 \\ x-5y=-3 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones inferiores son iguales, mientras que si multiplicamos la ecuación superior $2x + 3y = 7$ por 2, obtenemos la ecuación $4x + 6y = 14$.

Resolver un sistema es hallar su solución. En la secundaria se explican tres métodos de resolución: igualación, substitución y reducción.

Ejemplo

Resolución por igualación del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\}$

1) Despejamos x en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{7-3y}{2} \\ x=-3+5y \end{array}\right\}$$

(También se puede despejar la y)

2) Igualamos las expresiones de la incógnita despejada, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{7-3y}{2} \\ x=-3+5y \end{array}\right\} -3+5y=\frac{7-3y}{2}$$

3) Resolvemos la ecuación anterior; la solución de esta ecuación nos dará el valor de una de las incógnitas:

$-3+5y=\dfrac{7-3y}{2}$; $-6 + 10y = 7 - 3y$; $10y + 3y = 7+6$; $13y = 13$; $y = 1$

(Hemos resuelto una ecuación de primer grado en la que la incógnita es y)

4) Substituimos y por 1 en la ecuación $x = -3 + 5y$:

$$x = -3 + 5(1) \quad x = 2$$

Hemos obtenido el valor de la x. La solución del sistema es $x = 2$ y $y = 1$. Por último, conviene comprobar que el par ordenado de números que hemos obtenido efectivamente son la solución del sistema:

$$2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 7$$
$$2 - 5\cdot 1 = -3$$

17. Resuelve cada sistema por un método diferente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x+y=19 \\ 2x-y=9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 6x+4y=7 \\ -4x+4y=-3 \end{array}\right\}$$

Generalmente, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\}$ es un sistema sin solución, porque si $-2x + 2y$ vale -2, es imposible que, a la vez, $-2x + 2y$ sea 8. Por tanto, no es posible hallar una solución común a las dos ecuaciones.

Si resolvemos este sistema por reducción obtenemos la expresión 0 = 10, y como 0 no es igual a 10, el sistema no tiene solución:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\} \\ \hline 0=10 \end{array}$$

Cuando se llega a una expresión del tipo 0 = b (con b diferente de cero) el sistema no tiene solución.

Por otra parte, hay sistemas como, por ejemplo, $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\}$ que tienen infinitas soluciones. Basta observar que las dos ecuaciones son prácticamente la misma: la segunda es equivalente a la primera ya que resulta de multiplicar la primera por dos. En este caso, las infinitas soluciones de la primera, también lo son de la segunda.

Si resolvemos este sistema por reducción, obtenemos la expresión 0 = 0.

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 8x-8y=8 \\ 8x-8y=8 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 8x-8y=8 \\ 8x-8y=8 \end{array}\right\} \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Cuando se llega a una expresión del tipo 0 = 0, el sistema tiene infinitas soluciones.

La resolución grafica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas explica claramente porque sólo son posibles estas tres posibilidades:

Ejemplo

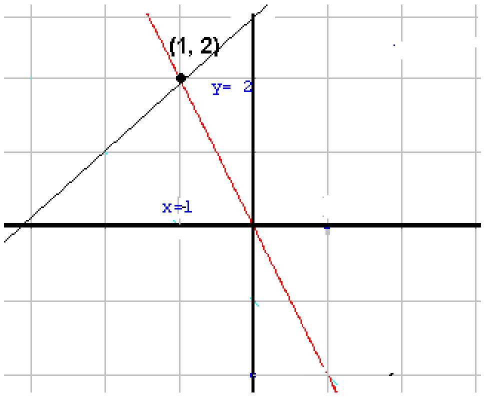
Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\}$$

Despejamos la y en las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x-2y=-6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y=-2x \\ -2y=-2x-6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=-2x \\ y=x+3 \end{array}\right\}$$

Las dos ecuaciones del último sistema son las ecuaciones explícitas de dos rectas. Si damos valores a la x y obtenemos los correspondientes valores de la y en cada ecuación del sistema, para cada ecuación obtendremos un conjunto de puntos (x,y), que representados en un sistema de ejes de coordenadas, dan lugar a una recta. Si consideramos los valores x = 0 y x = 1, obtenemos para la primera ecuación, los puntos (0,0) y (1,-2), con los cuales tenemos suficiente para representar la recta y para la segunda ecuación, los puntos (0,3) y (1,4).

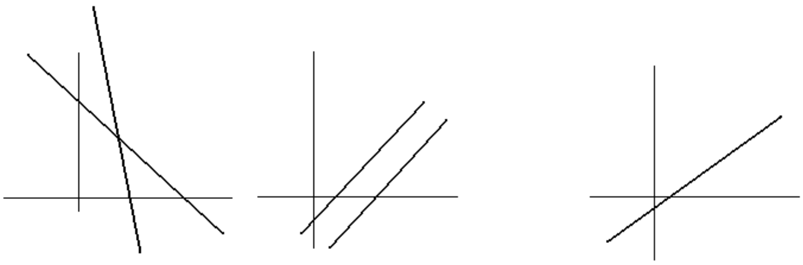


Como se puede observar las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (-1,2). Este punto es de la primera recta y, por tanto, sus coordenadas cumplen la primera ecuación del sistema, pero, al ser también de la segunda recta, también cumple la segunda ecuación del sistema. Por tanto, ¿qué información nos da este punto? Pues que la solución del sistema es x = -1, y = 2 lo cual se comprueba si en las ecuaciones del sistema substituimos x por 1 y y por -2

18. Aplica este procedimiento de resolución a un sistema que no tiene ninguna solución y a un sistema que tiene infinitas soluciones, ¿Qué observas?:

a) $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\}$

La interpretación gráfica de la solución de una ecuación del sistema como puntos de una recta y la interpretación gráfica de la solución de un sistema como los puntos en común de las rectas nos permite ver que sólo existen tres posibilidades: 1) que las rectas se corten, 2) sean paralelas o 3) sean la misma. Atendiendo a esta clasificación, un sistema sólo puede ser compatible determinado (una única solución), incompatible (ninguna solución) o bien compatible indeterminado (infinitas soluciones).



De la misma manera que ya hemos utilizado las ecuaciones de primer grado para resolver problemas, también se utilizan los sistemas para resolver determinados tipos de problemas. La estrategia a seguir es casi la misma que la utilizada para resolver problemas en los que había que plantear una ecuación de primer grado con una incógnita

Ejemplo:

Un tipo de mesa tiene 6 patas y otro tiene 8. En una tienda tienen en total 28 de estas mesas. Sabiendo que en total hay 188 patas. ¿Cuántas mesas de cada tipo hay en la tienda?

1) Incógnitas

Llamaremos x = n.º de mesas del primer tipo y y = n.º de mesas del segundo tipo.

2) Planteamiento del sistema

En total hay 28 -------------> $x + y = 28$

El primer tipo de mesa tiene 6 patas y el segundo 8 ----------------> $6x + 8y = 188$

3) Resolución del sistema $\left.\begin{array}{r} x+y= & 28 \\ 6x+8y= & 188 \end{array}\right\}$ por el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{r} x+y= & 28 \\ 6x+8y= & 188 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6x+6y= & 168 \\ 6x+8y= & 188 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 6x+6y= & 168 \\ 6x+8y= & 188 \end{array}\right\} \\ \hline 2y=20 \end{array}$$

$$2y = 20$$

$$y = 10$$

Substituimos en la primera ecuación y por 10:

$x + y = 28 \quad x + 10 = 28 \quad x = 28 - 10 \quad x = 18$

La solución es 18 mesas del primer tipo y 10 del segundo.

Finalmente, se comprueba que el par de números hallados son la solución del sistema:

$$18 + 10 = 28$$

$$6 \cdot 18 + 8 \cdot 10 = 188$$

19. Una persona tiene 20 billetes de 10 y 20 euros que suman en total 340 €. ¿Cuántos billetes tiene de cada clase?

20. En una reunión hay 25 chicas más que chicos. Diez parejas se van y quedan el doble de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas había en la reunión?

21. Un grupo de amigos decide comprar la merienda. Ana va a un quiosco donde compra 2 bocadillos pequeños de jamón y 1 refresco por 1,80 € y no se fija en el precio de cada cosa. Alberto también va a comprar al quiosco 3 bocadillos y 2 refrescos del mismo tipo y precio que los que compró Ana, paga 3,10 € y tampoco se fija en los precios.
a) ¿Cuál es el precio de un bocadillo? ¿Y de un refresco?
b) Más tarde, Miguel va a comprar 6 bocadillos pequeños de jamón y 3 refrescos del mismo tipo y paga 4,20 €. ¿Compró en el mismo quiosco?

También podemos considerar sistemas en los que alguna o las dos ecuaciones sean de grado superior a uno, la incógnita esté en el denominador, etc..

9.2. El punto de vista de las funciones proposicionales

Supongamos que designamos con la letra D el conjunto de los días de la semana.

D = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}.

- El enunciado "Martes sigue inmediatamente a Lunes" es una proposición, porque podemos afirmar que es verdadera.

- En cambio el enunciado, "Martes es posterior a *X*" es una función proposicional de una variable: mientras no demos un valor particular a la variable *X* no podemos afirmar si es verdadero o falso.
- También podemos construir enunciados con dos variables: "El día *X* es posterior al día *Y*". Asignando valores a *X* e *Y* obtenemos proposiciones. En la tabla adjunta se representa la función proposicional de dos variables *"El día X es posterior al día Y"*

Domingo	*						
Sábado							*
Viernes						*	
Jueves					*		
Miércoles				*			
Martes			*				
Lunes		*					
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

Otros ejemplos de sentencia abierta o función proposicional de dos variables son los siguientes:

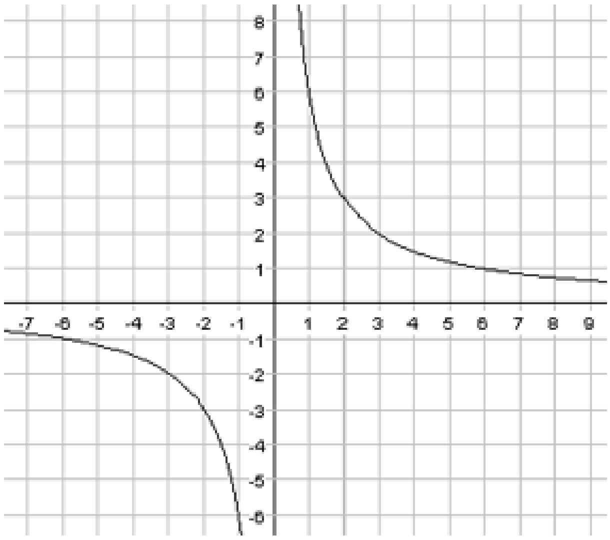
- El conjunto de pares de números naturales cuya suma es 8, $x + y = 8$ es un ejemplo de *ecuación* de dos variables. Su conjunto de validez o solución está formado por los pares ordenados, {(1,7), (7,1), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.
- La función proposicional, $x + y < 4$, es un ejemplo de *inecuación* de dos variables. Si tomamos como conjunto de sustitución *N* (número naturales), tiene como conjunto de validez los pares de números {(1,1), (1,2),(2,1)}.

Las funciones proposicionales de dos variables numéricas suelen tener como conjunto de sustitución el producto cartesiano de *RxR* (plano real). Los pares posibles de números reales que podrían satisfacer la función son, por tanto, infinitos, es decir, también será infinito el conjunto solución.

Ejemplo:

> Supongamos que, en la función proposicional (o simplemente, función) de dos variables, $x \cdot y = 6$, *x* e *y* toman sus valores en *R*. Podemos generar tantos pares de números que son soluciones de esa ecuación como deseemos, simplemente eligiendo cualquier valor (no cero) para *x* y después determinando el valor de *y*, que se obtiene dividiendo 6 por el valor asignado a *x*, ya que $x \cdot y = 6$ es equivalente a $y = 6/x$

La manera habitual de expresar el conjunto de pares que satisfacen una función proposicional de dos variables es mediante una representación en el sistema de coordenadas cartesianas, como se indica en la figura para la función $x \cdot y = 6$.



Cuando dos ecuaciones con dos variables se consideran conjuntamente, unidas mediante la conjunción *y*, forman un *sistema de dos ecuaciones de dos variables*. Ambas constituyen una función proposicional (sentencia abierta) compuesta. Con frecuencia la conjunción y se sustituye por una llave.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$$

quiere decir, $3x - 2y = 9$ y $4x + 2y = -6$

10. LAS FUNCIONES Y SUS REPRESENTACIONES

10.1. El concepto de función

Hay muchas situaciones en las que dos variables están relacionadas. Esta relación es una función cuando para cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Esta relación se puede expresar en forma de enunciado, gráfica, tabla y fórmula.

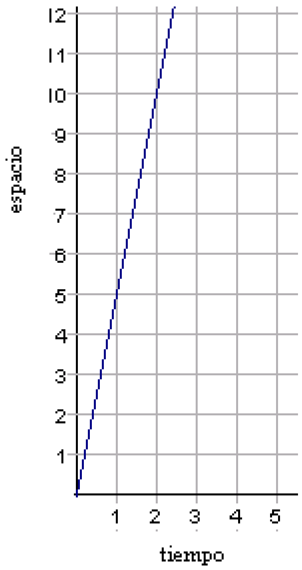
Ejemplo

Si un móvil se desplaza a velocidad constante, el espacio que recorre en un tiempo dado se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo. Decimos que el espacio depende o es función del tiempo.

Si indicamos con las variables *e* y *t* el espacio y el tiempo, respectivamente, de un móvil que se mueve a velocidad constante, por ejemplo de 5m/s, la dependencia del espacio con respecto al tiempo se expresa simbólicamente con la fórmula, $e = 5t$. La relación de dependencia entre las variables espacio y tiempo se puede expresar mediante una fórmula algebraica, como hemos hecho, $e = 5t$, o bien, para una serie finita de valores, en forma de tabla:

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Espacio	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

También se puede expresar mediante una gráfica cartesiana, como la que reproducimos a continuación.



22. En una entidad bancaria hay una tabla que muestra las equivalencias entre el euro y el dolar:

Dólares	9	18	24	36
Euros	10	20	30	40

a) Cuando se ha confeccionado esta tabla se ha cometido un error. ¿Cuál?

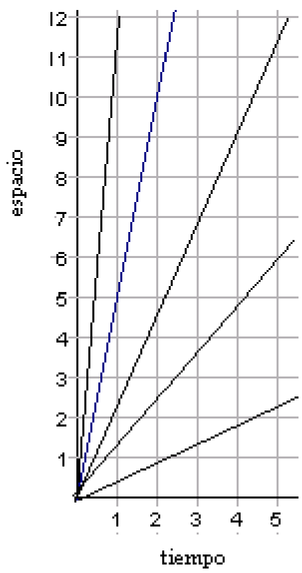
d) Dibuja la gráfica de esta relación a partir de la tabla anterior.

c) Halla una fórmula que permita saber el n.º de dólares conociendo el n.º de euros.

10.2. Modelos de funciones

Funciones de proporcionalidad directa

En la expresión de la relación entre espacio y tiempo recorrido por un móvil en el caso de movimiento uniforme, la velocidad se supone constante en cada caso particular, pero puede ser distinta de un caso a otro. La velocidad interviene en la fórmula $e = vt$ como un *parámetro*. Dando valores distintos a este parámetro obtenemos una familia de funciones, que se expresan gráficamente mediante rectas concurrentes en el origen de coordenadas y con pendientes diferentes.



Otras relaciones de dependencia entre cantidades de magnitudes físicas que se expresan con fórmulas similares son, por ejemplo,

- La relación entre la velocidad y el tiempo para una aceleración constante: $v=at$.
- La relación entre la altura y la sombra de un edificio.
- La ley de Ohm, que nos dice que la diferencia de potencia V aplicada a un conductor de resistencia constante R es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica I que circula por él: $V = RI$.
- La ley de Hook: Si colgamos un muelle por un extremo y le aplicamos un peso p en el otro extremo, le produciremos un alargamiento Δl que viene dado por la fórmula: $\Delta l = kp$, donde k es una constante característica del material y de las dimensiones y forma del muelle.

Todas estas fórmulas tienen la misma estructura y permiten, fijado un valor para el parámetro, calcular el valor y (*variable dependiente*) conocido el valor x (*variable independiente*). Se trata de la *función de proporcionalidad directa* $y = ax$. Este tipo de función tiene una extraordinaria importancia ya que permite modelizar una gran variedad de situaciones en todos los campos de aplicación de las matemáticas.

En una función de proporcionalidad directa los valores que toman las variables x, e y son en general números reales, que corresponden a las medidas de magnitudes que intervienen en las diversas situaciones. Si duplicamos, triplicamos, dividimos por dos, etc. la cantidad representada por x, la cantidad representada por y también se duplica, triplica, divide por dos, etc. Por otra parte, como una función de proporcionalidad directa se puede expresar por una fórmula del tipo $y=ax$, el cociente y/x es constante e igual al parámetro a de la fórmula.

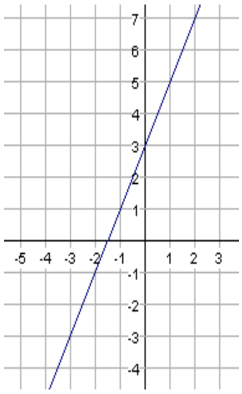
Las relaciones de dependencia entre dos o más variables también pueden venir expresadas por fórmulas que no se corresponden con el modelo de la función de proporcionalidad directa. En la secundaria, además de las funciones de proporcionalidad directa se estudian otros modelos de funciones. Los principales son:

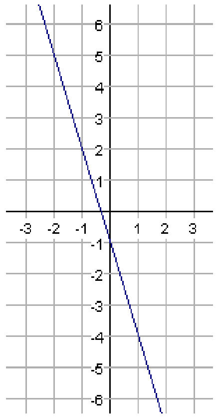
Funciones afines

Tienen por fórmula $f(x) = ax+b$

Las gráficas que las representan son rectas que no pasan por el origen de coordenadas, siempre que $b \neq 0$. El parámetro a de la fórmula determina la inclinación de la recta. Si su signo es positivo la función es creciente y si es negativo la función es decreciente. El coeficiente b determina la segunda coordenada del punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas

Por ejemplo, $f(x) = 2x + 3$ y $f(x) = -3x -1$ son funciones de este tipo.





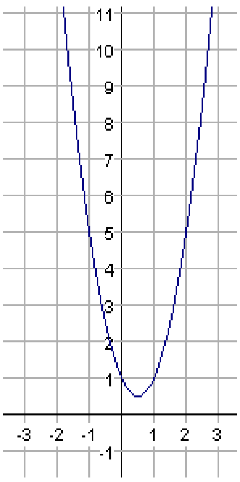
Funciones cuadráticas

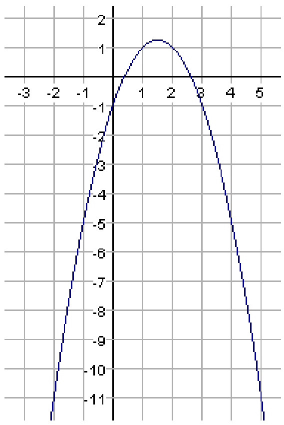
Tienen por fórmula $f(x) = ax^2+bx+c$

Las gráficas que las representan son parábolas.

El valor del parámetro a determina la amplitud de la parábola. Si es positivo la abertura de la parábola es hacia arriba y si es negativo hacia abajo. El coeficiente c determina la segunda coordenada del punto de corte de la parábola con el eje de ordenadas

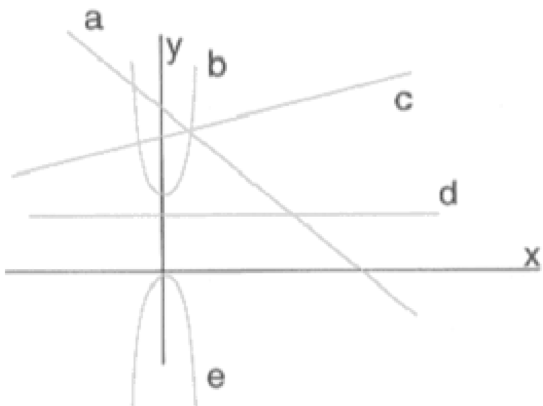
Por ejemplo, $f(x) = 2x^2-2x+1$ y $f(x) = -x^2+ 3x-1$ son funciones de este tipo.





23. Asocia cada fórmula con la gráfica correspondiente:

a) $f(x) = -x + 7$ b) $f(x) = 3$ c) $f(x) = -2x^2$ d) $f(x) = 2x^2 + 4$ e) $f(x) = 0,5x + 7$



24. Asocia a cada enunciado un modelo de función:

a) La relación entre el lado y el perímetro de un cuadrado

b) La relación entre el lado y el área de un cuadrado

c) La relación entre las ventas y el sueldo de un vendedor de libros que está compuesto de una parte fija y de un porcentaje sobre ventas

Otros modelos

Además de estos dos modelos de funciones se estudian las funcions de proporcionalidad inversa que tienen por gráfica una curva llamada hipérbola. Estas funciones aparecen en las situaciones de proporcionalidad inversa, y presentan una fórmula del tipo $f(x) = a/x$.

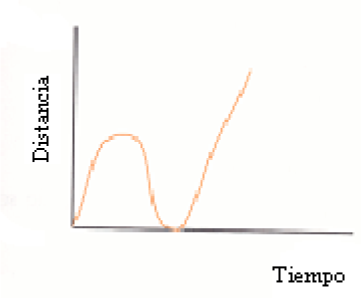
Otro tipo de funciones estudiadas son las que describen diversos fenómenos de la vida real en los cuales el crecimiento o decrecimiento se hace de manera progresiva. Las hallamos en la descripción de la evolución de poblaciones, en la desintegración radioactiva, en el estudio de la presión atmosférica, en el cálculo del interés compuesto, etc. Son las funciones exponenciales y su fórmula es del tipo $f(x) = a^x$.

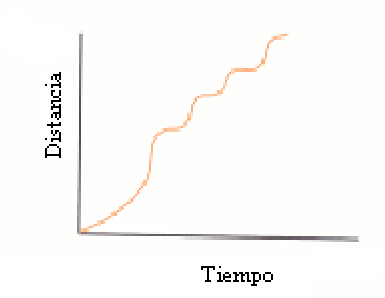
Otro tipo de funciones estudiadas son aquellas que describen fenómenos que se repiten a intervalos regulares: las mareas, el número de horas de luz en una determinada latitud, los latidos del corazón, etc. También, hay otros fenómenos que se repiten periódicamente y han de ser estudiados en un laboratorio: las oscilaciones del péndulo, las vibraciones del sonido, las revoluciones del movimiento de un motor, etc. La gráfica de estas funciones, llamadas funciones periódicas, se va repitiendo de manera regular.

25. Luisa y Antonio explican su ida al trabajo:

- Luisa: he venido en moto, pero a medio camino me he dado cuenta de que me había dejado unos documentos y he vuelto a buscarlos. Después he tenido que correr mucho para no llegar tarde al trabajo.
- Antonio: Mi padre me ha llevado en coche. Al principio el tránsito era fluido, pero después nos hemos topado con un montón de semáforos en rojo.

¿Cuál de estas gráficas corresponde a cada uno?





26. Dibuja una gráfica que represente la relación entre el tiempo y la cantidad de agua de un depósito, siguiendo las siguientes especificaciones:

El depósito se va llenando de manera regular hasta que llega a un cierto nivel. En este momento se vacía rápidamente y vuelve a comenzar el llenado. El tiempo que tarda en llenarse es de 10 minutos, y para vaciarse es de 30 segundos. La capacidad máxima del depósito es de 30 litros.

27. Queremos vallar con alambre un jardín de forma cuadrada[6].

a) ¿Cuánto alambre es necesario si el lado del jardín mide 12 m? ¿Y si mide 7 m, o 33,5 m?

b) Construye una tabla con los datos anteriores y añade otros.

c) Sitúa en una gráfica los datos de la tabla. ¿Cómo quedan los puntos?

d) Si hemos utilizado 108 m de alambre, ¿qué dimensiones tenía el jardín? Explica cómo se hallan los metros de alambre necesarios si se conoce la longitud del lado del jardín.

e) Escribe una fórmula que nos dé los metros de alambre (que llamamos y) necesarios para vallar un jardín de x metros de lado.

28. Un grupo de amigos quiere comprar un balón que cuesta 35 euros.

a) ¿Cuánto pagarán si son 10 chicos? ¿Y si son 25?

b) Construye una tabla con los datos anteriores, que nos dé lo que debe pagar cada uno según el número de chicos, y añade otros pares de valores.

c) Sitúa en una gráfica los datos de la tabla.

d) ¿Qué propiedad cumplen los pares de valores de la tabla?

e) Si el número de chicos es x, y lo que paga cada uno es y, escribe una fórmula que exprese esta situación.

29. Un globo sonda lleva incorporado un termómetro para medir la temperatura a distintas alturas. Si llamamos x a la altura del globo en metros, respecto al nivel del mar, e y a la temperatura en dicha altura, la siguiente fórmula nos permite conocer la temperatura para una altura determinada.

$$y = -\frac{1}{200}x + 10$$

[6] Azcárate y Deulofeu (1991, p.85-86)

a) ¿Qué temperatura marcará el termómetro al nivel del mar, a 200 m y a 1 km?

b) ¿A cuántos metros de altura la temperatura es de 0ºC? ¿Cada cuántos metros la temperatura disminuye 1ºC?

c) Construye una tabla con los datos anteriores que nos dé la temperatura para cada altura. Sitúa los valores de la tabla en una gráfica cartesiana?

30. El coste de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El precio del cristal es de 5 euros por dm^2, y el marco 10 euros por dm.

a) ¿Cuánto costará una ventana de 7 dm de lado, de 1 m y de 1,5 m?

b) Construye una tabla, con los datos anteriores y otros que elijas, que dé el coste según la longitud del lado de la ventana.

c) Sitúa los valores de la tabla anterior en una gráfica cartesiana.

d) Llamando *x* a la longitud del lado de la ventana e y al coste de la misma, escribe una fórmula que dé el coste conocida la longitud del lado.

11. TALLER MATEMÁTICO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones identificando las transformaciones de equivalencia que se usan:

a) $3(6 - x) = 2^4$ b) $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$ c) $3(x - 2) - 4(x + 5) = 10(x + 4)$

d) $\frac{x}{2} + \frac{3+x}{7} = -\frac{x}{14}$ e) $\frac{5}{3} \cdot \left(3 - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{9}{2} - x\right)$

2. Queremos repartir cromos a un grupo de niños. No podemos dar 6 cromos a cada uno porque faltarían 8. Si les damos 5, nos sobran 20. ¿Cuántos cromos tenemos para repartir? ¿Cuántos niños hay?

3. Un trabajador gana 6,40 euros por hora de trabajo ordinaria, mientras que las horas extraordinarias que trabaje por encima de 40 horas semanales las cobra a la mitad de las horas ordinarias. ¿Cuántas horas extraordinarias debe trabajar para ganar 352 euros a la semana?

4. En el último año el salario bruto de Carlos se redujo un 35% por impuestos, seguros, etc. Este año ha recibido un 6% de incremento en el salario bruto, pero las deducciones han subido al 37%. ¿En qué porcentaje se ha incrementado su salario neto?

5. Resuelve las siguientes inecuaciones, representa sobre la recta numérica el conjunto solución e identifica las transformaciones de equivalencia que se aplican:

a) $5(6x + 3) \leq 3$ b) $x(3 + x) > x^2 + 5x - 12$ c) $(x + 2)^2 < x^2 + 2^2$

6. Una escuela de primaria tiene dos ofertas para su servicio de copistería. La empresa "Copy" le alquila una fotocopiadora por 150 € al mes y 0,01 € por cada fotocopia. En cambio, la empresa "La mejor fotocopia" le alquila una fotocopiadora por 110 € al mes y 0,02 € por cada fotocopia.

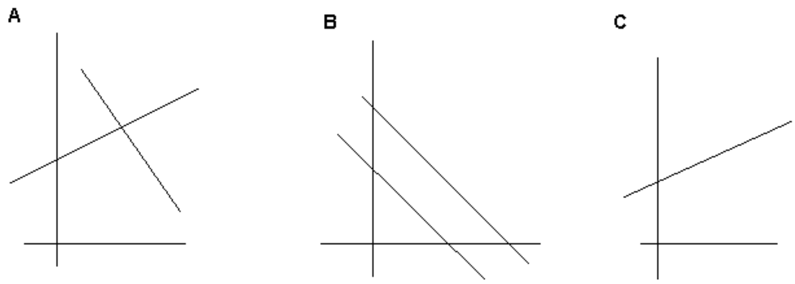
a) ¿A partir de cuantas fotocopias le interesa contratar los servicios de "Copy" a esta escuela?
b) ¿Para qué cantidad de fotocopias es indiferente cuál sea la empresa que gestiona el servicio?

7. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Cuando se invierten de orden las cifras, el número obtenido es igual al original menos 27. ¿Cuál es el número original?

8. Un grifo llena un depósito en 90 minutos, mientras que otro lo hace en 135 minutos. ¿Cuánto tardan los dos juntos?

9. a) Del sistema $\left.\begin{array}{r}4x+y=-3\\8x+ky=-6\end{array}\right\}$ sabemos que es compatible indeterminado, ¿cuál es el valor de k?
b) Del sistema $\left.\begin{array}{r}4x+y=-3\\8x+2y=-2k\end{array}\right\}$ sabemos que es incompatible, ¿Qué puedes decir del valor de k?

10. Relaciona las siguientes afirmaciones con la gráfica correspondiente:
a) Sistema compatible determinado
b) Sistema incompatible
c) Ninguna solución
d) Sistema compatible indeterminado
e) Una única solución
f) Infinitas soluciones



11. Dada la tabla del peso y el precio correspondiente a un tipo de queso del Pirineo.

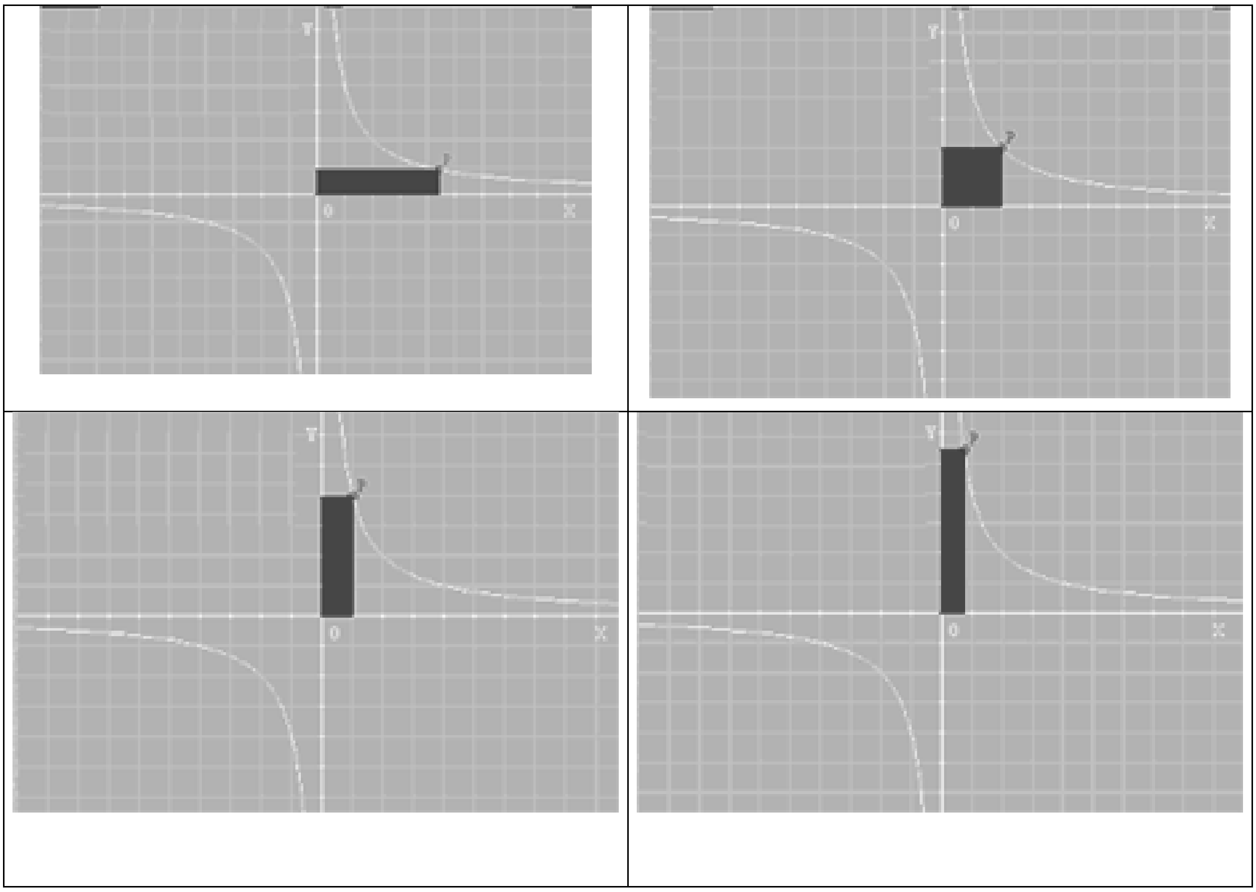
peso (gramos)	100 g	250 g	400 g	500 g	750 g	1000 g
precio (euros)	0,9 €	2,25 €	3,6 €	4,5 €	6,75 €	9 €

a) Divide cada peso por su precio. ¿Qué resultado has obtenido?¿Qué significa?
b) Halla la fórmula que permite, conociendo el peso, calcular el precio.
c) Dibuja la gráfica de esta función. ¿A que modelo corresponde?

12. Considera rectángulos cuya área es de 36 unidades cuadradas. El ancho *a* de los rectángulos varía con relación al largo *b* según la fórmula *a* =36/*b*. Haz una tabla que muestre los valores de los anchos para todos los valores posibles del largo que sean

números enteros menores o iguales a 36. Representa gráficamente la relación entre las dimensiones de dichos rectángulos. ¿Qué forma se espera tendrá la gráfica?

13. A continuación tienes la gráfica de la función de proporcionalidad inversa $f(x) = k/x$. Los puntos de esta gráfica determinan rectángulos. ¿Qué puedes decir de todos los rectángulos determinados por los puntos de la gráfica?



14. Un material radioactivo tiene la propiedad de que cada año tiene una masa igual a la mitad de la que tenía el año anterior. Inicialmente, se dispone de 1 gramo de este material.

a) ¿Cuántos gramos de este material tendremos al año siguiente?¿Y al finalizar el segundo año? ¿Y a cabo de tres años? ¿Y al cabo de 5 años?

b) Confecciona una tabla ordenada que relacione los años transcurridos y la masa del material en gramos.

c) ¿Qué masa había un año antes de comenzar la observación? ¿Y dos años antes?

d) Completa la tabla del apartado b) con los valores correspondientes a dos años anteriores al comienzo de la observación (considera estos años como negativos).

e) Representa gráficamente esta relación entre el tiempo y la masa.

f) Halla la fórmula que permite calcular los gramos de material radioactivo a partir del tiempo transcurrido.

15. Una cartulina tiene un grosor de aproximadamente 1 mm.

a) ¿Cuál es el grosor después de 6 pliegues?

b) ¿Cuántos pliegues son necesarios para que el grosor supere la distancia Tierra-Luna (385.000 km, aproximadamente)

16. Un estudiante de física deja caer una bola por una rampa y observa lo siguiente:

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia recorrida (cm)	0	3,2	12,8	28,8	51,2	80

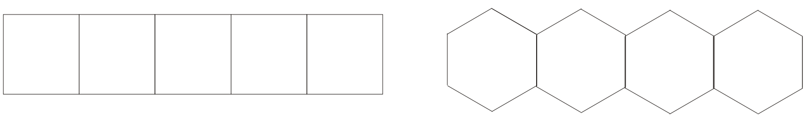
a) ¿Qué distancia recorrerá la bola en 10 segundos?

b) Para estimar la distancia que recorrerá la bola después de un tiempo t resulta útil ajustar una función cuadrática $g(t) = at^2 + bt + c$ calculando los valores de a, b y c de tal manera que la función $g(t)$ pase por tres de los puntos medidos. Resuelve el problema, planteando un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

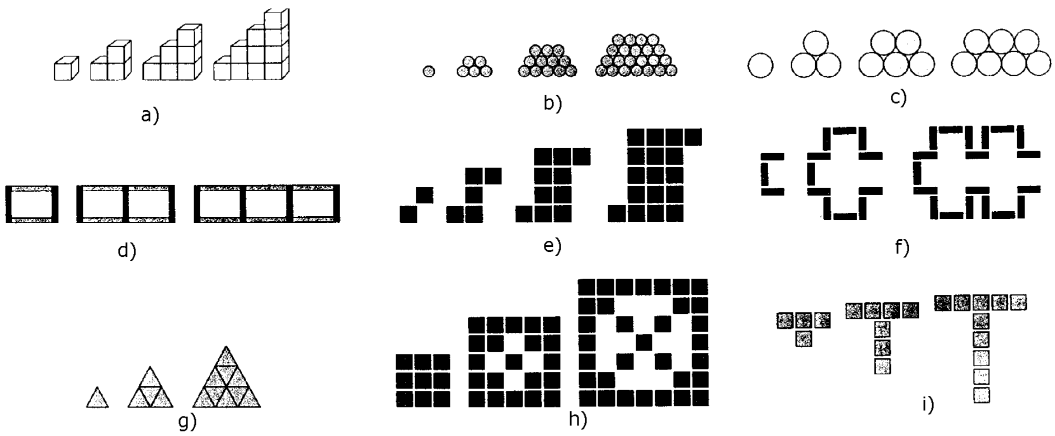
17. Cuál es el perímetro de un friso formado por n teselas de formas:

a) cuadrangulares

b) hexágonos regulares.



18. Para los patrones de crecimiento de la figura adjunta encontrar una función que permita calcular el número de elementos para el término n de la sucesión.



19. Al disponer puntos en el plano en forma triangular y contar el número total de éstos en cada uno de los triángulos, obtenemos los llamados "Números triangulares" 1, 3, 6, 10,...

*	*	*	*
	**	**	**
		***	***
			****

a) Llamaremos T_n al número triangular cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para T_n ?
b) Los números cuadrados son:

*	* *	* * *
	* *	* * *
		* * *

c) Llamaremos C_n al número cuadrado cuyo lado está formado por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n ?
d) ¿Hay alguna relación entre los números triangulares y los cuadrados?¿Cuál?

Bibliografía

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
Ruiz, F. (2001). Números y formas. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (p. 449-476). Madrid: Síntesis.
Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M. y Fernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.